❄ Chapitre 4 ❄

Les bases de numération

Une quantité d'objets est représentée par un nombre.

A l'origine de l'humanité chaque quantité était représentée par un nombre équivalent de cailloux (calculus) de bâtons ou de points ...

L'homme, utilisant ses dix doigts (digit) pour compter, est venue la numération en base 10 ou numération décimale. On utilise aussi de manière épisodique la base 12 (les douzaines) la base soixante (heures, minutes et secondes). Les informaticiens utilisent les bases **2**, **16** et **8**.

I. La numération de position : le système décimal

Définition 1:

Nous utilisons dans la vie courante le système décimal, où on peut écrire n'importe quel nombre entier comme une succession de chiffres dont chacun est pris dans l'ensemble des dix chiffres :

$$0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$$

Exemple 1:

Le nombre 2329 est formé de quatre chiffres.

L'écriture 2329 exprime un entier naturel formé de 2 milliers, 3 centaines, 2 dizaines et 9 unités.

Ou encore $2329 = 2\times10^3 + 3\times10^2 + 2\times10^1 + 9\times10^0$.

Cette représentation à l'aide de puissances successives de 10 s'appelle une écriture du nombre a en base 10 (base décimale).

Définition 2:

Soit p un nombre entier. L'écriture d'un nombre en base p : $(a_n \dots a_2,a_1,a_0)p$ où a_0, a_1, a_2,...,a_n sont des nombres entiers compris entre 0 et p–1 se traduit par la relation algébrique suivante :

$$(a_n \dots a_2 a_1 a_0)_p = a_n \times p^n + \dots + a_2 \times p^2 + a_1 \times p^1 + a_0 \times p^0$$

Exemple 2:

$(58623)_{10}$ = ...

$(1230)_4$ = ...

$(40312)_5$ = ...

$(212)_3$ = ...

II. La numération binaire

Définition 3:

On reprend la formule précédente avec $p = 2$. Il n'y a donc que deux chiffres qui sont 0 et 1. La numération en base 2 est le système le plus adapté aux machines électroniques : les deux symboles 1 et 0 correspondent à deux états, le courant passe ou ne passe pas. La représentation d'un nombre en base 2 suit le même principe qu'en base 10.

Méthode 1 : *Conversion de l'écriture binaire à l'écriture décimale*

On utilise le tableau des puissances de 2 (si on ne le connais pas encore par cœur!)

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13_{10}$

Exercice 1 Donner la représentation en écriture décimale des nombres suivants

1. $(10001)_2 =$ ....
2. $(10111001)_2 =$ ....
3. $(11010011100)_2 =$ ....

Exercice 2 Montrer qu'avec un mot de n bits, on peut représenter les nombres de 0 à $2n-1$.

Méthode 2 : *Conversion de l'écriture décimale à l'écriture binaire*

On fait une succession de division par 2 jusqu'à obtenir un quotient égal à 0.
Testons avec 29_{10} :

$29 = 14 \times 2 + 1$
$14 = 7 \times 2 + 0$
$7 = 3 \times 2 + 1$
$3 = 1 \times 2 + 1$
$1 = 0 \times 2 + 1$

Donc $29_{10} = 11101_2$

Exercice 3 Trouver la représentation en base 2 des nombres :111_{10} ; 942_{10} ; 7523_{10}

III. Opérations en binaire

1. L'addition

L'addition se pratique de la même façon que dans le calcul décimal usuel, et repose sur la table d'addition suivante :

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Exemple 3:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2. Multiplication

La multiplication se pratique de la même façon que dans le calcul décimal usuel, et repose sur la table de multiplication suivante :

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Exemple 4:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \times & & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

IV. La numération Hexadécimal

L'utilisation par l'homme du système binaire est particulièrement délicate (risque d'erreurs) la conversion systématique en décimale est lourde. Les informaticiens utilisent le système Hexadécimal (base 16). Nous allons voir qu'il est relativement simple et surtout que le passage de la base 2 à la base 16 est très simple.

Définition 4:

Le système hexadécimal est comme le binaire et le décimal un système de numération de position pondéré. Il nécessite 16 symboles :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

Où $A_{16} = 10_{10}$; $B_{16} = 11_{10}$; $C_{16} = 12_{10}$; $D_{16} = 13_{10}$; $E_{16} = 14_{10}$; $F_{16} = 15_{10}$.

Méthode 3 : *Conversion de l'écriture hexadécimale à l'écriture décimale*

Le nombre $B2_{16} = 11 \times 16^1 + 2 \times 16^0 = 178_{10}$.
Pour s'entrainer, donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$1B2F_{16}$ = ...

231_{16} = ...

Méthode 4 : *Conversion de l'écriture décimale à l'écriture Hexadécimale*

Comme dans le cas d'une écriture binaire, on fait une succession de division non plus par 2 mais par 16 jusqu'à obtenir un quotient égal à 0.
Convertissons 5567_{10} en hexadécimal : $5567 = 347 \times 16 + 15$
$347 = 21 \times 16 + 11$
$21 = 1 \times 16 + 5$
$1 = 0 \times 16 + 1$ Donc $5567_{10} = 15BE_{16}$

Tableau de conversion Décimale Binaire Hexadécimal

Décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Binaire																
Hexadécimal																

Méthode 5 : *La conversion hexadécimal/binaire*

La conversion de l'hexadécimal vers le binaire et, inversement, la conversion du binaire vers l'hexadécimal, se font **directement** (c'est-à-dire sans passer par le code décimal) et très rapidement.

Pour convertir $A19D_{16}$ en binaire, il suffit simplement de remplacer chaque chiffre hexadécimal par son écriture en binaire (sur quatre bits chacun) :

$$A19D_{16} = 1010000110011101$$

Pour convertir 101101110010100 en hexadécimal, il suffit de grouper les bits quatre par quatre (à partir de la droite, et en ajoutant éventuellement des 0 à gauche) puis de traduire chaque groupe de quatre bits en hexadécimal :

$$101101110010100_2 = 0101101110010100 = 5B94_{16}$$

Pour convertir 101101110010100 en décimal, on gagne du temps en passant par l'hexadécimal en écrivant que

$$101101110010100_2 = 5B94_{16} = 5 \times 16^3 + 11 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 4 \times 16^0 = 23444_{10}$$

Exercice 4 Donner l'écriture hexadécimale des nombres suivants : 145236_{10} ; 253_{10} ; 11010111_{10} ;11010111_2 ; 1100110001110_2

Exercice 5 Donner l'écriture binaire des nombres suivants : $7B_{16}$; $C7D3_{16}$; 1234_{10} ; 1234_{16}

Exercice 6 Poser et effectuer les opérations suivantes :

1. $1010 + 11$
2. 1010×11
3. $11011 + 1101$
4. 11011×1101
5. $100111001 + 1001111$
6. 100111001×1001111

Exercice 7 Donner une écriture décimale des nombres suivants : 1234_5 ; 54701_8 ; 120122_3