❄ Chapitre 2 ❄

# Fonctions et taux de variations

## I. Généralités sur les fonctions

**Définition 1:**

Définir une **fonction** $f$ sur une partie $D$ de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre $x$ de $D$ un unique nombre réel $f(x)$.
On note $x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$
$x$ est la **variable**.

**Remarque :**

Une fonction $f$ définie sur $D$ peut être donnée de trois façons :

- par une **formule** ou une **expression littérale**.
- par une **courbe représentative**.
- par un **tableau de valeur**.
- sous forme **algorithmique**.

### 1. Vocabulaire

**Définition 2:**

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre $x$ appartenant à un ensemble $\mathscr{D}$ associe un nombre $y$.
On dit que $y$ est l'**image** de $x$ par la fonction $f$
On dit que $x$ est un **antécédent** de $y$ par la fonction $f$.

**Remarque :**

Pour toute fonction $f$, un nombre $x$ a une et une seule image par $f$.
Par contre, chaque nombre $y$ peut avoir plusieurs antécédents, ou ne pas avoir d'antécédents.

**Exemple 1:**

Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = x^2 + 3$ ou encore $g : x \mapsto x^2 + 3$

- L'image de 5 est $g(5) = 5^2 + 3 = 28$. On écrit $g(5) = 28$ ou $g : 5 \mapsto 28$
- Les antécédents de 7 vérifient $g(x) = 7$ c'est à dire $x^2 + 3 = 7$ soit $x^2 = 4$ soit$x = -2$ ou $x = 2$,
- Il n'y a pas d'antécédent de 1 car l'équation $g(x) = 1$ n'a pas de solution : $x^2 + 3 = 1 \iff x^2 = -2$.

**Définition 3:**

Pour une fonction $f$ donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé **ensemble de définition** de la fonction $f$, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.

**Exemple 2:**

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-4}$ a pour ensemble de définition $]-\infty; 2[\, \cup\, ]2; +\infty[$.

- En effet, l'expression $\dfrac{1}{2x-4}$ n'a de sens que pour les valeurs de $x$ telles que $2x - 4 \neq 0$ (car le dénominateur d'une fraction ne peut être égal à 0), c'est-à-dire pour $x \neq 2$,
- On dira aussi que 2 est une **valeur interdite** pour la fonction $f$.

Graphiquement, l'ensemble de définition est l'intervalle sur lequel la courbe existe.

## 2. Courbe représentative

**Définition 4:**

Dans un repère $(O;I;J)$, l'ensemble des points $M$ de coordonnées $\big(x;f(x)\big)$ forme la **courbe représentative de la fonction** $f$, souvent notée $\mathscr{C}_f$.

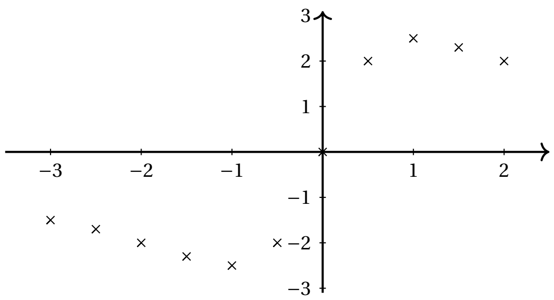
**Méthode 1 :** *Construction d'une courbe représentative*

On souhaite tracer la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[-3;2]$ par : $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$.

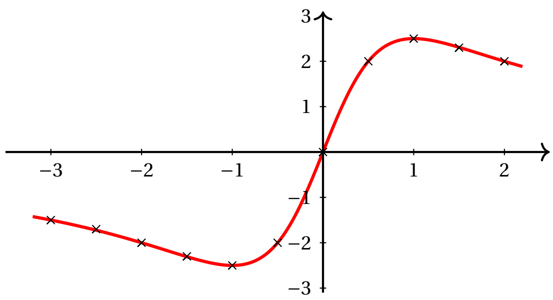
1. On commence par compléter un tableau de valeurs :

| $x$ | $-3$ | $-2,5$ | $-2$ | $-1,5$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1,5$ | $-1,7$ | $-2$ | $-2,3$ | $-2,5$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $2,5$ | $2,3$ | $2$ |

2. Puis on place les points $M\big(x;f(x)\big)$ dans le repère ci-dessous :




3. On trace la courbe représentative « à main levée »




**Remarque :**

Le point de coordonnées $(10;0.5)$ n'est pas sur la courbe représentative de la fonction $f$ car $f(10)=0,495\neq 0,5$.

# II. Variations d'une fonction

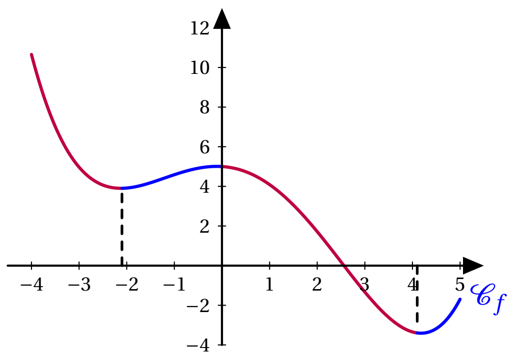
## 1. Aspect graphique

Donner les variations d'une fonction signifie préciser sur quels intervalles la fonction est croissante, puis sur quels intervalles la fonction est décroissante.

**Exemple 3:**

Dans cet exemple, on se contente de décrire graphiquement ce que l'on observe sans rien démontrer formellement.

- Graphiquement, cette fonction semble décroissante sur $[-4;-2,1]$, croissante sur $[-2,1;0]$, décroissante sur $[0;4,1]$, puis croissante $[4,1;5]$.
- Ou encore : $f$ semble croissante sur $[-2,1;0]$ et sur $[4,1;5]$, décroissante sur $[-4;-2,1]$ et sur $[0;4,1]$.




Le tableau de variation d'une fonction est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de la fonction.

### Exemple 4:

Le tableau de variation de la fonction $f$ est :

| $x$ | $-4$ | | $-2.1$ | | $0$ | | $4.1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $11$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $-2$ |

## 2. Aspect algébrique

### Définition 5:

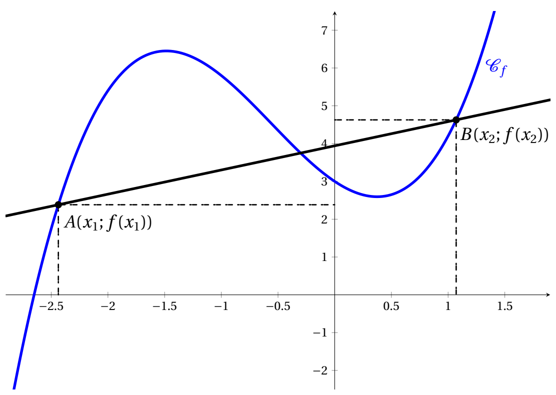
On considère la fonction $f$ défini sur un ensemble $\mathscr{D}$ et deux nombres réels distincts $x_1$ et $x_2$ de $\mathscr{D}$.

On appelle taux de variations de $f$ entre $x_1$ et $x_2$ le nombre

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ce taux de variations correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$.

Simulation Géogébra




### Exemple 5:

Calculons le taux de variation de la fonction, $f : x \mapsto x^2$.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1} = x_2+x_1$$

Le taux de variation pour la fonction carrée est toujours égale à $x_2+x_1$.

### Propriété 1 :

On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$.

- Pour tout réels distincts $x_1$ et $x_2$ de l'intervalle I le taux de variation $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est **positif** si et seulement si la fonction $f$ est **croissante** sur I.
- Pour tout réels distincts $x_1$ et $x_2$ de l'intervalle I le taux de variation $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est **négatif** si et seulement la fonction $f$ est **décroissante** sur I.

### Exemple 6:

Nous allons étudiez le sens de variation de la fonction carrée grâce au signe du taux de variation. Dans l'exemple précédent, nous avons vu que le taux de variation pour la fonction carrée est toujours égale à $x_2+x_1$.

Nous allons raisonner par disjonction des cas :

- Si $x_1$ et $x_2$ sont positifs donc $I = [0; +\infty[$, $x_2+x_1$ est positif.
- Si $x_1$ et $x_2$ sont négatifs donc $I = ]-\infty; 0]$, $x_2+x_1$ est négatif.

La fonction carrée est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.

### Remarque :

Bien que cette méthode soit déjà plus efficace que de revenir à la définition d'une fonction croissante, nous verrons des méthodes encore plus efficace pour étudier les variations d'une fonction dans les chapitres sur la dérivation.