❉ Chapitre 3 ❉

# Mode de génération d'une suite, sens de variation, représentation graphique

## I. Notion de suite numérique

**Définition 1:**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite numérique $u$ est une fonction définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \geqslant n_0$, on associe le nombre noté $u(n)$ ou encore $u_n$. La suite est notée $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ou, plus simplement, $(u_n)$.
Ainsi, une suite est une liste de nombres, rangés dans un certain ordre, qui se poursuit.

| Rang | | Terme | Notation indicielle |
|---|---|---|---|
| $0$ | $\longmapsto$ | $u(0)$ | $u_0$ |
| $1$ | $\longmapsto$ | $u(1)$ | $u_1$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $n-1$ | $\longmapsto$ | $u(n-1)$ | $u_{n-1}$ |
| $n$ | $\longmapsto$ | $u(n)$ | $u_n$ |
| $n+1$ | $\longmapsto$ | $u(n+1)$ | $u_{n+1}$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | |

**Vocabulaire** :

- $u_n$ est le terme général de la suite.
- $u_{n-1}$ est le terme qui précède $u_n$.
- $u_{n+1}$ est le terme qui suit $u_n$.
- On dit que $u_n$ est la notation indicielle de $u(n)$($n$ est en indice).
- On note la suite en mettant des parenthèses $(u_n)$.

**Remarque :**

On commence d'habitude par $u_0$, mais parfois aussi par $u_1$. $u_n$ est le $n$-ième terme si on commence par $u_1$, mais le $(n+1)$-ième si on commence par $u_0$. (On décale tous les indices de 1)

## II. Mode de génération d'une suite

### 1. Relation explicite

**Définition 2:**

Une suite est définie explicitement lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de $n$. On donne alors l'expression du terme général $u_n$ en fonction de $n$. Il existe une fonction $f$ tel que $u_n = f(n)$

**Exemple 1:**

Soit la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $u_n = n^2 + 5n - 1$.
On a $u_n = f(n)$, avec $f(x) = x^2 + 5x - 1$.

$$\begin{array}{rcccccc}
u_0 & = & f(0) & = & 0^2+5\times 0-1 & = & -1 \\
u_1 & = & f(1) & = & 1^2+5\times 1-1 & = & 5 \\
\dots & & & & & & \\
u_{100} & = & f(100) & = & 100^2+5\times 100-1 & = & 10499
\end{array}$$

## 2. Relation par récurrence

**Définition 3:**
Une suite est définie par récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne donc l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. Cette relation est appelée relation de récurrence.

**Exemple 2:**
Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3 \times u_n + 1$, pour tout entier naturel $n$.

Connaissant $u_0$, on peut calculer $u_1$ :

$$u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

Puis, à partir de $u_1$, on calcule $u_2$ :

$$u_2 = 3 \times u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$

Puis $u_3$, $u_4$, ...

**Remarque :**
Pour calculer les termes "éloignés" d'une suite, utiliser la relation de récurrence peut se révéler très long. On utilise généralement un tableur ou la calculatrice pour trouver ces valeurs.

# III. Représentation graphique

**Définition 4:**
Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite $(u_n)$ est l'ensemble des points $A_n$ de coordonnées $(n; u(n))$ où $(n; u_n)$ avec $n$ qui décrit les entiers naturels.

**Exemple 3:**

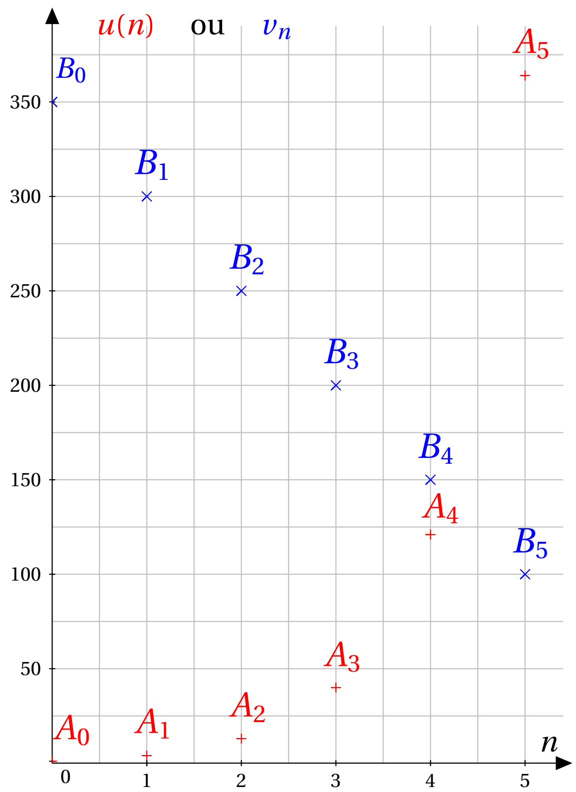
1. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u(0) = 1$ et la relation de récurrence $u(n+1) = 3 \times u(n) + 1$, pour tout entier naturel $n$.
   On calcul les premiers termes de cette suite :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(n)$ | 1 | 4 | 13 | 40 | 121 | 364 |

2. Soit la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = 350$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = vn - 50$, pour tout entier naturel $n$.
   On calcul les premiers termes de cette suite :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 350 | 300 | 250 | 200 | 150 | 100 |

Sur le graphique ci-contre, les points $A_n$ correspondent à la suite $(u_n)$ et les points $B_n$ correspondent à la suite $(v_n)$



# IV. Sens de variation

### Définition 5:

1. Une suite $(u_n)$ est dite **croissante** si pour tout entier naturel $n \geqslant k$ : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Une suite $(u_n)$ est dite **décroissante** si pour tout entier naturel $n \geqslant k$ : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. Une suite $(u_n)$ est dite **constante** si pour tout entier naturel $n \geqslant k$ : $u_{n+1} = u_n$.

### Méthode 1 :

On peut calculer la différence entre deux termes consécutifs, $u_{n+1} - u_n$

1. Si cette différence est toujours positive à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est croissante.
2. Si cette différence est toujours négative à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est décroissante.
3. Si cette différence est nulle à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est constante.

### Méthode 2 :

Cette méthode n'est valable que si les termes de la suite sont strictement positifs.
On peut calculer $\dfrac{u_{n+1}}{un}$.

1. Si ce ratio est toujours supérieur à 1 à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est croissante.
2. Si ce ratio est toujours inférieur à 1 à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est décroissante.
3. Si ce ratio est toujours égale à 1 à partir d'un certain entier k, on peut en conclure que la suite est constante.

### Méthode 3 :

Cette méthode est applicable lorsque la suite est définie explicitement par une relation $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie sur $[0;+\infty[$.

1. Si $f$ est strictement croissante, alors la suite $(u_n)$ est strictement croissante.
2. Si $f$ est strictement décroissante, alors la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

### Exemple 4:

1. Soit la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = v_n - 2$ pour tout entier naturel $n$.
   Déterminons le sens de variation de la suite $(v_n)$.
   $$v_{n+1} - v_n \quad = \quad v_n - 2 - v_n \quad = \quad -2$$
   $-2$ est négatif donc la suite $(v_n)$ est décroissante.
2. Soit la suite $(w_n)$ définie par $w_n = 3n + 7$ pour tout entier naturel $n$.
   Déterminons le sens de variation de la suite $(w_n)$. La fonction $f : x \mapsto 3x + 7$ est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$ $(a = 3 > 0)$. Donc la suite de terme général $w_n = f(n)$ est croissante.