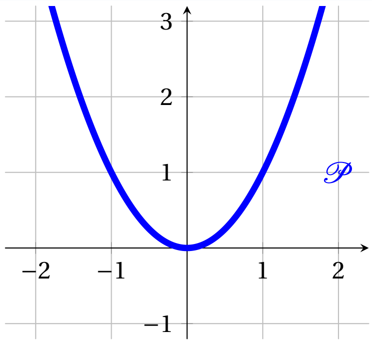
❉ Chapitre 4 ❉

Fonctions polynôme de degré 2

I. Rappel : La fonction carrée

Définition 1:

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^2$ s'appelle la **fonction carrée**.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dans un repère $(O; I; J)$, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole** de sommet O.
Cette parabole admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, ce qui caractérise une fonction **paire**.

Propriété 1 :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration :

Cette propriété a été démontrée en seconde grâce à la définition et dans le chapitre précédent grâce au taux de variation.

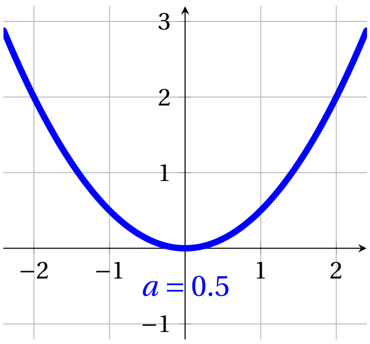
II. De la fonction carrée aux fonctions polynômes de degré 2

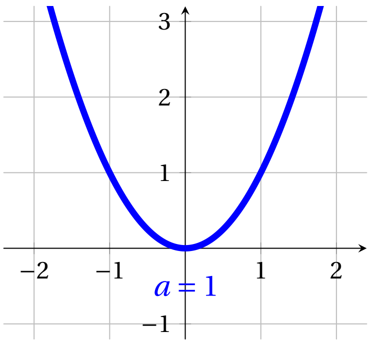
1. Étude graphique de la fonction $x \mapsto ax^2$

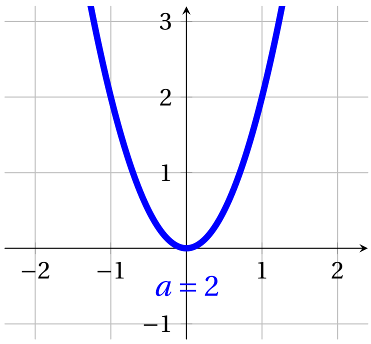
Simulation Géogébra

Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ pour différentes valeurs de a :

1. Testons avec plusieurs valeurs de a positive :

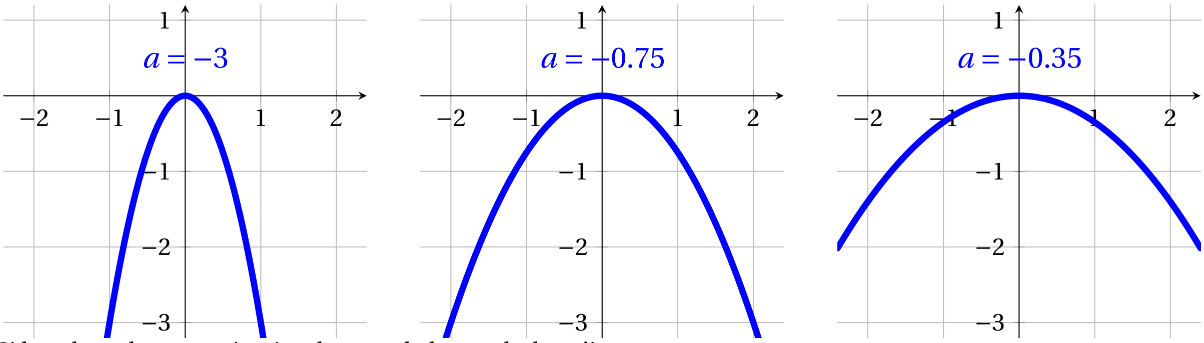






On voit que plus la valeur de a augmente, plus la courbe représentative de la fonction se « resserre » autour de son axe de symétrie.

2. Testons avec plusieurs valeurs de a négative :

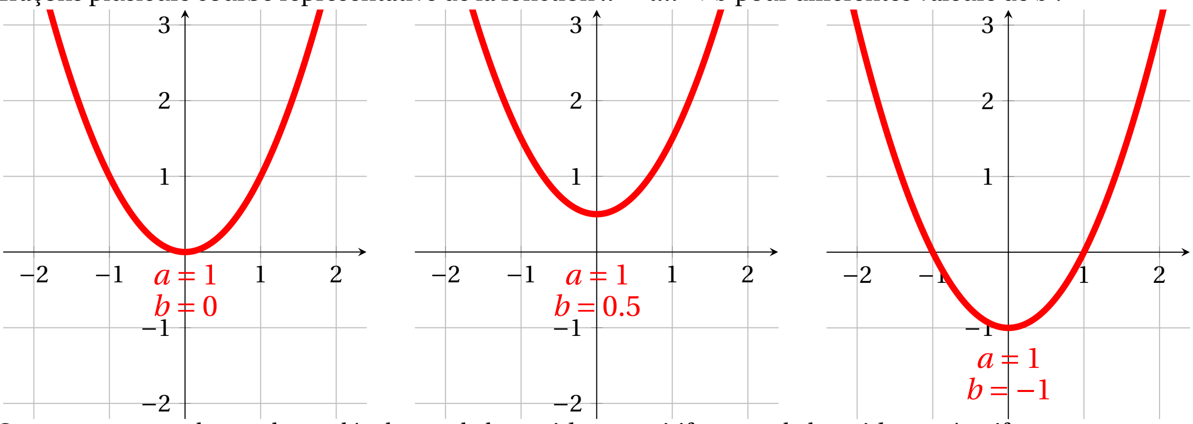


Si la valeur de a est négative, le sens de la parabole « s'inverse ».

2. Étude graphique de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$

Simulation Géogébra

Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ pour différentes valeurs de b :



On remarque que la courbe se décale vers le haut si b est positif ou vers le bas si b est négatif.
On remarque aussi que toutes les courbes tracées possèdent un axe de symétrie d'équation $x = 0$.

III. Forme développée

Définition 2:

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$,
où a,b et c sont des réels donnés et $a \neq 0$.
Cette écriture de $f(x)$ est appelée **forme développée** de $f(x)$.
Une fonction polynôme de degré 2 se nomme aussi **trinôme** du second degré.

Exemple 1:

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4$. On a :
   - $a = 3$ donc $a \neq 0$
   - $b = 0$
   - $c = -4$

   La fonction f est donc une fonction polynôme de degré 2.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x+1)(x-2)$.

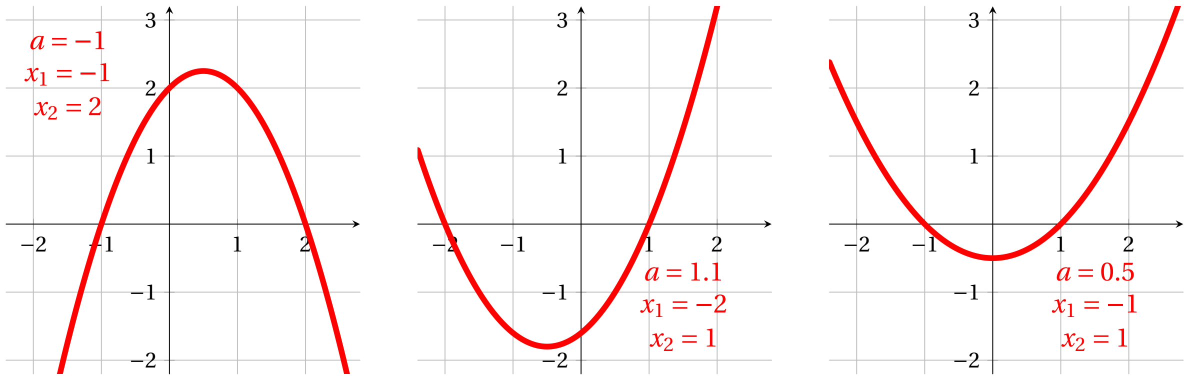
$$\begin{aligned} -3(x+1)(x-2) &= -3(x \times x - x \times 2 + 1 \times x - 2 \times 1) \\ &= -3(x^2 - 2x + x - 2) \\ &= -3(x^2 - x - 2) \\ &= -3x^2 + 3x + 6 \end{aligned}$$

   La fonction f est donc une fonction polynôme de degré 2 avec $a = -3$ donc $a \neq 0$, $b = 3$ et $c = 6$.

IV. Forme factorisée et racine d'un trinôme

1. Étude de la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$

Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ pour différentes valeurs de x_1 et x_2 :



On remarque que les valeurs x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersections entre la parabole et l'axe des abscisses.

On remarque également que l'axe de symétrie n'est plus l'axe des ordonnée mais il est décalé.

Propriété 2 :

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
L'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f a alors pour équation :

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Remarque :

Cette valeur $\frac{x_1+x_2}{2}$ est souvent noté α dans les cours sur le second degré. C'est aussi l'abscisse du sommet de la parabole.

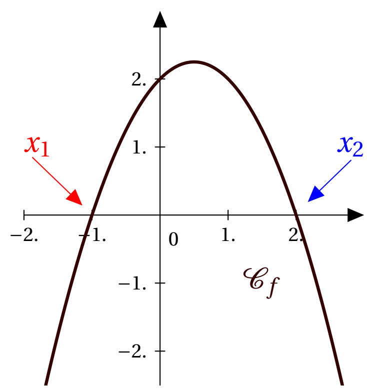
2. Résolution graphique d'une équation du second degré

Définition 3:

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$ sont les abscisses des points d'intersections entre la courbe représentative de f, noté $\mathscr{C}_f$, et l'axe des abscisses.

Exemple 2:

Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+x+2$.



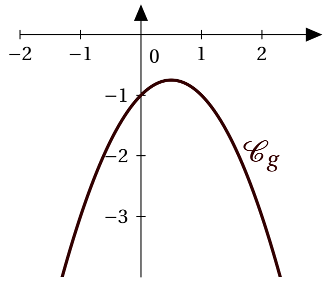
De plus, on observe graphiquement les solutions x_1 et x_2 de l'équation $f(x)=0$, à savoir :

$$x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

Donc la fonction f se factorise et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-x_1)(x-x_2) \\ &= -1\times(x-(-1))\,(x-2) \\ &= -(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

Exemple 3:



On étudie cette fois la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + x - 1$$

On observe graphiquement que l'équation $g(x) = 0$ ne possède pas de solution.

Donc la fonction g n'admet pas de forme factorisée.

3. Signe de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

Dans la partie II.1., on a observé que la courbe représentative de la fonction f changeait d'orientation en fonction de la valeur de a.

Dans la partie IV.1., nous avons vu que la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ s'annulait en x_1 et en x_2.

En combinant ces deux éléments, on peut établir le tableau de signe la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$:

Propriété 3 :

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Avec la convention $x_1 < x_2$, le tableau de signe de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

Méthode 1 : *Établir le tableau de signe d'une fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$*

Construisons le tableau de signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -3(x - 5)(x + 3)$$

1. Identifier les coefficients a, x_1 et x_2. Attention aux signes de ces quantités !
   - $a = -3$
   - $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$
2. Déterminer le signe de a et la plus grande des deux valeurs x_1 et x_2.
   - $a = -3$ donc a est négatif (signe « - »).
   - $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$ donc x_2 est plus petit que x_1.
3. Utiliser la propriété ci-dessus pour construire le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

En remplaçant par les valeurs de a, x_1 et x_2 :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	