❄ Chapitre 6 ❄

Nombre dérivé et équation de tangente

I. Tangente à une courbe : Aspect graphique

1. Coefficient directeur d'une droite

Propriété 1 :

On considère la droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées.
Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ appartiennent à la droite(d), le coefficient directeur m de la droite (d) vérifie :

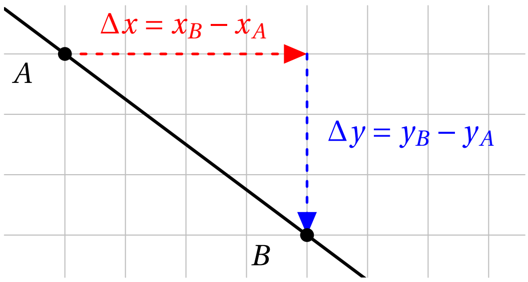
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque :

En physique, on utilise souvent la notation Δx pour $x_B - x_A$ et Δy pour $y_B - y_A$.
Nous avons alors avec cette écriture

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δx et Δy peuvent directement être lu sur le graphique comme ci-contre :

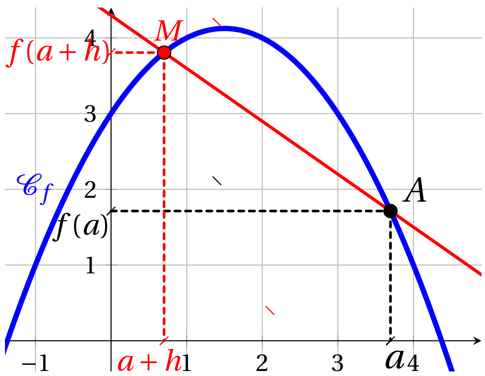


Pour une fonction affine, le coefficient directeur est donc égale au taux de variation.

2. Sécantes à une courbe et taux de variation

Définition 1:

Le taux de variation de la fonction f au point A d'abscisse a est le nombre $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.



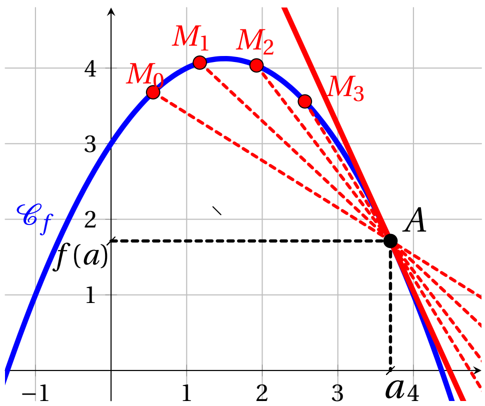
On note cette quantité de plusieurs manière différente :

- En mathématiques, on utilise généralement $\tau(a)$.
- Les physiciens lui préfèrent la notation $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$ qui a l'avantage d'être plus « parlante ».

3. Sécante en un point et position limite

Définition 2:

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisses a est la droite passant par le point A, position limite des sécantes à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par A.



II. Aspect algébrique : équation de tangente

1. Nombre dérivé

Définition 3:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
Dire que f est dérivable en a, c'est dire que lorsque h se rapproche de 0, le taux de variation entre a et $a+h$ se rapproche d'une valeur ℓ, ce que l'on note

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

l est appelé le **nombre dérivé de f en a.**

Remarque :

Pour désigner le nombre dérivé d'une fonction f en un point a, les mathématiciens emploient la notation $f'(a)$ due au mathématicien français Joseph-Louis LAGRANGE (1736 – 1813).

Les physiciens privilégient la notation différentielle introduite, en 1684, par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716), dans son traité « Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes ...».

Par exemple, la dérivée de la vitesse par rapport au temps est noté $\dfrac{dv}{dt}$ ou encore $\dot{v}$. Cette notation dernière notation est appelée « notation de Newton ».

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-6x+11$. Montrons que f est dérivable en 2.

Calculons le taux de variations entre 2 et $2+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

Pour calculer ce taux de variations, on a besoin de $f(2+h)$ et de $f(2)$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3-6\times 2+11\\ &= 8-12+11\\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^3-6\times(2+h)+11\\ &= (2+h)(4+4h+h^2)-(12+6h)+11\\ &= 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3-12-6h+11\\ &= 7+6h+6h^2+h^3\end{aligned}$$

Donc :

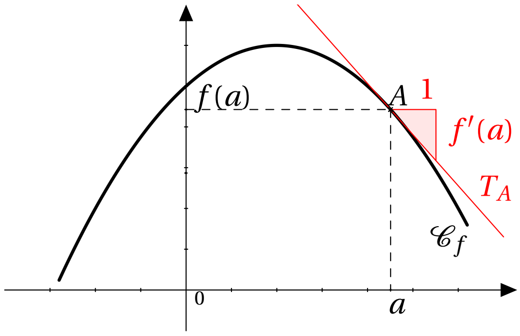
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\ &= \frac{7+6h+6h^2+h^3-7}{h}\\ &= \frac{6h+6h^2+h^3}{h}\\ &= \frac{h(6+6h+h^2)}{h}\\ &= 6+6h+h^2\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}6+6h+h^2 = 6$$

.

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=6$.

2. Équation de la tangente



Définition 4:

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété 2 :

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente T_A en A à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_A : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration :

On remarquera que la tangente T_A est une droite, de coefficient directeur donné $\left(f'(a)\right)$ et passant par le point A de coordonnée $\left(a; f(a)\right)$

Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x + 11$. Déterminons cette fois l'équation de la tangente en 2.

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(a)(x-a) + f(a) \\ & = & f'(2)(x-2) + f(2) \\ & = & 6(x-2) + 7 \\ & = & 6x - 12 + 7 \\ & = & 6x - 5 \end{array}$$

L'équation réduite de la tangente en 2 est $y = 6x - 5$.

3. Approximation affine

Définition 5:

Soit f une fonction dérivable en a, l'approximation affine de $f(x)$ (lorsque x est au voisinage de a est donnée par :

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a)$$

Autrement dit, à proximité de a, l'accroissement des images est approximativement proportionnel à l'accroissement de la variable. Le coefficient de proportionnalité est le nombre dérivé $f'(a)$. L'approximation est d'autant meilleur que la valeur de x est proche de la valeur a.

$$\underbrace{f(x) - f(a)}_{\text{Accroissement des images}} \simeq \underbrace{f'(a)}_{\text{Coefficent de proportionnalité}} \times \underbrace{(x - a)}_{\text{Accroissement de la variable}}$$

On peut aussi à l'aide d'un changement de variable, exprimer cette approximation affine en fonction de h, qui serait la différence entre deux abscisses.

$$\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\text{Accroissement des images}} \simeq \underbrace{f'(a)}_{\text{Coefficent de proportionnalité}} \times \underbrace{(h)}_{\text{Accroissement de la variable}}$$