❉ Chapitre 8 ❉

Dérivée de fonctions 1

I. De nombre dérivé à fonction dérivée

Définition 1:

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en tout réel a de I. Si f est dérivable sur I, on appelle fonction dérivée de f sur I la fonction notée f', définie sur D par $f' : x \to f'(x)$.

Exemple 1:

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Soit $a \in \mathbb{R}$, on calcul le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h}\\ &= 2a+h\end{aligned}$$

Puis on détermine la valeur de ce taux de variation quand h se rapproche de 0.

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 2a+h\\ &= 2a\end{aligned}$$

Donc, quelque soit le réel $a \in \mathbb{R}$, on a $f'(a) = 2a$ La fonction f est donc dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$, donc f admet une fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 2x$.

II. Dérivée des fonctions polynômes

1. Dérivée de fonction de référence

Le tableau ci dessous regroupe les dérivées et les ensembles de définitions des différentes fonctions de référence.

Propriété 1 :

Fonction f	Domaine de définition	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
k avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$	$\mathbb{R}$

2. Produit d'une fonction par un réel

Propriété 2 :
Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un nombre réel et u une fonction dérivable sur $]a;b[$, alors f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = \lambda u'(x)$$

Exemple 2:
Dérivons la fonction $f : x \mapsto 4x^3$.

La fonction $f(x) = 4x^3 = 4 \times u(x)$

avec $u(x) = x^3$ $u'(x) = 3x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times u'(x) \\ &= 4 \times 3x^2 \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto 4x^3$ et la fonction $f' : x \mapsto 12x^2$

3. Somme de deux fonctions

Propriété 3 :
Si $f(x) = u(x) + v(x)$ avec u et v deux fonctions dérivables sur $]a;b[$, alors f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Exemple 3:
Dérivons la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + 5$.

La fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5 = u(x) + v(x) + w(x)$

avec
$$\begin{array}{ll} u(x) = 2x^3 & u'(x) = 6x^2 \\ v(x) = 3x^2 & v'(x) = 6x \\ w(x) = 5 & w'(x) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times u'(x) + v'(x) + w'(x) \\ &= 6x^2 + 6x + 0 \\ &= 6x^2 + 6x \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + 5$ et la fonction $f' : x \mapsto 6x^2 + 6x$