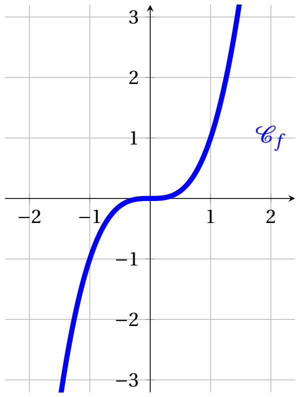
❄ Chapitre 12 ❄

Fonction du troisième degré

I. Rappel : La fonction cube $x \mapsto x^3$

Définition 1:

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^3$ est appelée **fonction cube**



x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

La fonction cube est **impaire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport a l'origine du repère.
La courbe représentant la fonction cube dans un repère orthogonal est appelée **cubique**

Propriété 1 :

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Proposition à démontrer : « La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ »

On calcule le taux de variation de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

On utilise l'identité remarquable : $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$

II. Résolution d'équation $x^3 = c$ $(c > 0)$

Propriété 2 :

On considère le réel c positif. L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution qui est :

$$x = c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$$

Exemple 1:

1. On veut résoudre l'équation $x^3 = 64$.

   D'après la propriété précédente, $x^3 = 64$ admet une unique solution positive $x = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$.

2. On veut résoudre l'équation $x^3 = 48$.

   D'après la propriété précédente, $x^3 = 48$ admet une unique solution positive $x = 48^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{48} \simeq 3,634$ à 0.001 près

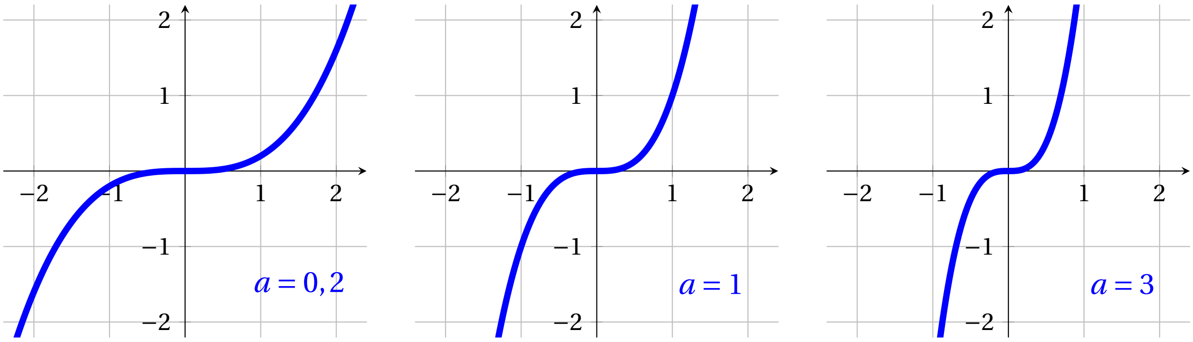
III. De la fonction cube aux fonctions polynômes de degré 3

1. Étude graphique de la fonction $x \mapsto ax^3$

Simulation Géogébra

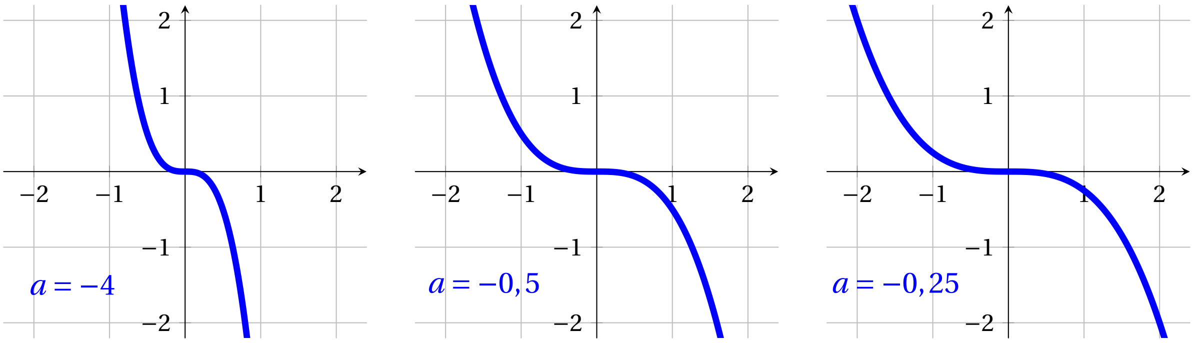
Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^3$ pour différentes valeurs de a :

1. Testons avec plusieurs valeurs de a positive :



On voit que plus la valeur de a augmente, plus la courbe représentative de la fonction se « resserre » autour de l'axe des ordonnées.

2. Testons avec plusieurs valeurs de a négative :

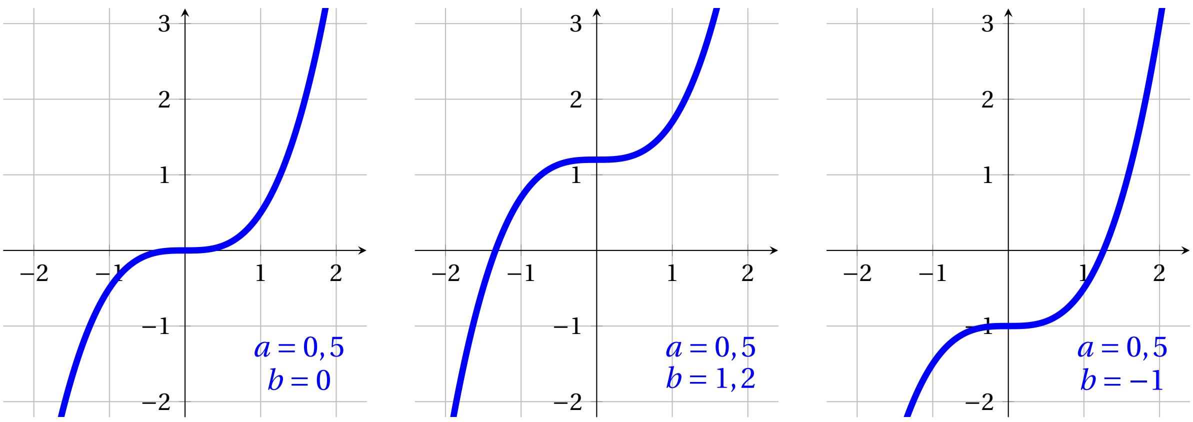


Si la valeur de a est négative, la courbe représentative de la fonction cube semble « s'inverser ».

2. Étude graphique de la fonction $x \mapsto ax^3 + b$

Simulation Géogébra

Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^3 + b$ pour différentes valeurs de b :



On remarque que la courbe se décale de b, vers le haut si b est positif, ou vers le bas si b est négatif.

IV. Forme développée

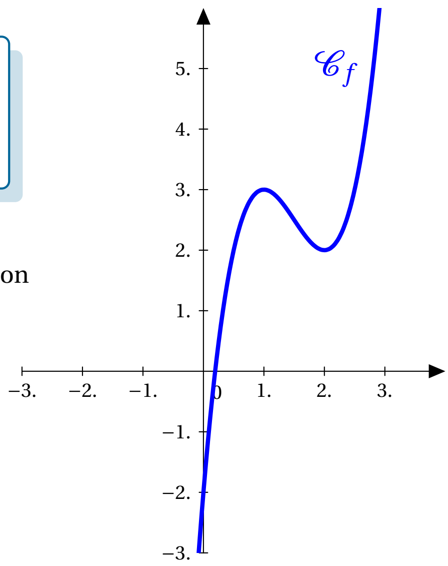
Définition 2:
Une fonction f polynôme de degré 3 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ avec } a, b, c, \text{ et } d \text{ des réels et } a \neq 0$$

Exemple 2:
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ est une fonction polynôme de degré 3.
On a :

- $a = 2$
- $b = -9$
- $c = 12$
- $d = -2$

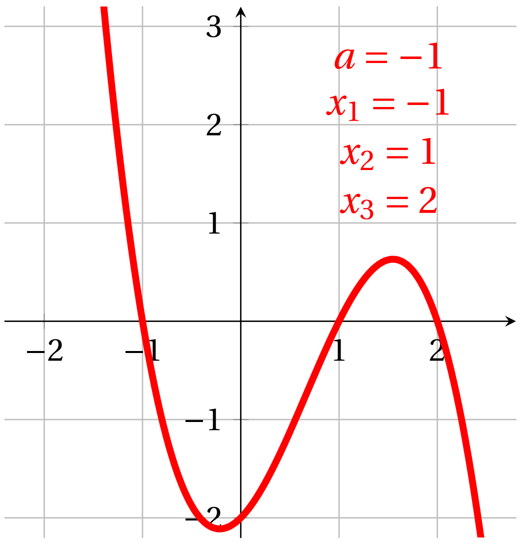
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-contre :

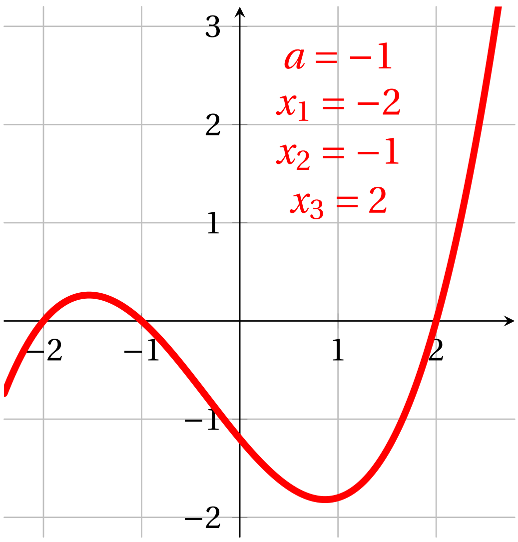


V. Forme factorisée et racine d'un polynome de degré 3

1. Étude de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Traçons plusieurs courbe représentative de la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ pour différentes valeurs de x_1, x_2 et x_3 :





Remarque :
Les racines de f se lisent directement sur le graphique. Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de l'axe des abscisses.

2. Signe de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Dans la partie III.1., on a observé que la courbe représentative de la fonction f changeait d'orientation en fonction de la valeur de a.

Dans la partie V.1., nous avons vu que la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ s'annulait en x_1, x_2 et en x_3.

En combinant ces deux éléments, on peut établir le tableau de signe la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$:

Propriété 3 :

Soit f la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
Avec la convention $x_1 < x_2 < x_3$, le tableau de signe de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		signe de -a	0	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

Méthode 1 : *Établir le tableau de signe d'une fonction* $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Construisons le tableau de signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2(x-5)(x+3)(x-4)$$

1. Identifier les coefficients a, x_1, x_2 et x_3. Attention aux signes de ces quantités !
   - $a = -2$
   - $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ et $x_3 = 4$
2. Déterminer le signe de a et la plus grande et la plus petite des trois valeurs x_1, x_2 et x_3.
   - $a = -2$ donc a est négatif (signe « - »).
   - $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$ donc $x_2 < x_3 < x_1$.
3. Utiliser la propriété ci-dessus pour construire le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_2		x_3		x_1		$+\infty$
$f(x)$		signe de -a	0	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

En remplaçant par les valeurs de a, x_1 et x_2 :

x	$-\infty$		-3		4		5		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	