❄ Chapitre 13 ❄

Loi de Bernoulli

I. Expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes

Définition 1:

Deux expériences sont indépendantes si et seulement si le résultat de l'une n'influe pas sur celui de l'autre. Autrement dit :

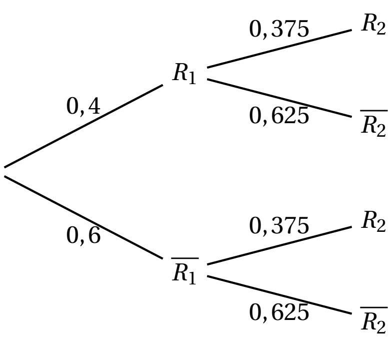
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple 1:

On considère deux urnes contenant des boules indiscernables au touché. La première contient deux boules rouges et trois boules vertes et la deuxième contient trois boules rouges, deux boules vertes et trois boules bleues.
On tire une boule dans la première urne puis une boule dans la deuxième urne.
On considère les événements :

- R_1 : « La boule tirée dans la première urne est rouge »
- R_2 : « La boule tirée dans la deuxième urne est rouge »

On a donc $P(R_1) = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et $P(R_1) = \dfrac{3}{8} = 0,375$
On peut représenter la situation par un arbre pondéré suivant :



La probabilité d'obtenir deux boules rouges est donc égale à : $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) = 0,4 \times 0,375 = 0,15$
La probabilité d'obtenir aucune boule rouges est donc égale à : $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) \times P(\overline{R_2}) = 0,6 \times 0,675 = 0,405$

II. Loi de Bernoulli

1. Épreuve de Bernoulli

Définition 2:

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues. On définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 0 pour l'une des issues et 1 pour l'autre. On pose : $p = P(X = 0)$ et $1 - p = P(X = 1)$.

Exemple 2:

Une joueuse professionnelle de tennis réussit son service dans 87% des cas. On peut associer à cette situation une épreuve de Bernoulli. Les issues sont :

- « réussir son premier service » de probabilité $p = 0,87$
- « rater son premier service » de probabilité $1 - 0,9 = 0,13$

2. Loi de Bernoulli

Définition 3:

La loi de probabilité associé à une épreuve de Bernoulli est nommée loi de Bernoulli de paramètre p. Elle est donnée par le tableau :

x_i	0	1	Total
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p	1

Exemple 3:

Si on reprend l'exemple précédent, on peut modéliser le problème à l'aide d'une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,87$. La loi de probabilité est donnée par le tableau :

x_i	0	1	Total
$P(X = x_i)$	$0,13$	$0,87$	1

Propriété 1 :

L'espérance d'un variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli est $E(X) = p$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « L'espérance d'un variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli est $E(X) = p$ »

L'espérance d'une variable aléatoire X est donnée par :

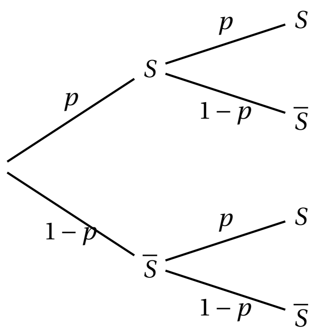
$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n) \\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p = p \end{aligned}$$

III. Schéma de Bernoulli

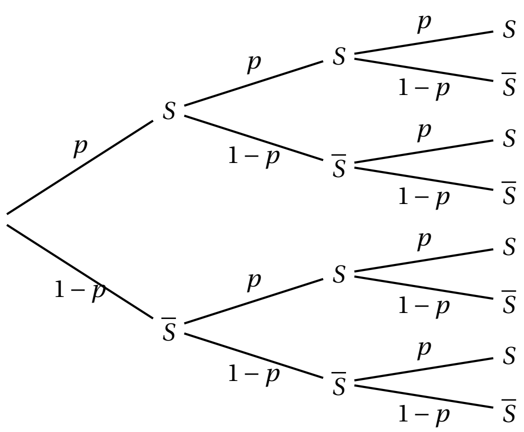
Définition 4:

On appelle schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

La représentation graphique d'un schéma de Bernoulli de paramètre p et $n = 2$ est la suivante :



La représentation graphique d'un schéma de Bernoulli de paramètre p et $n = 3$ est la suivante :



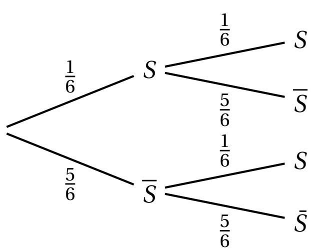
Propriété 2 :

Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple 4:

On lance deux fois un dé équilibré à six faces. Le succès de cette expérience est l'obtention de la face 6. On est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et $n = 2$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$



$P(SS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(S\overline{S}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$P(\overline{S}S) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P(\overline{S}\overline{S}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$