❉ Chapitre 1 ❉

Généralités sur les vecteurs

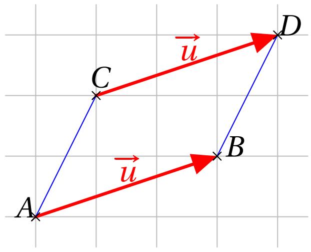
I. Vecteur et translation

Définition 1:

La connaissance de cette définition n'est pas exigible.

1. Un point C est l'image d'un point D par la **translation** qui transforme A en B lorsque le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. On dit alors que C est l'image du point D par la translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transformant D en C :

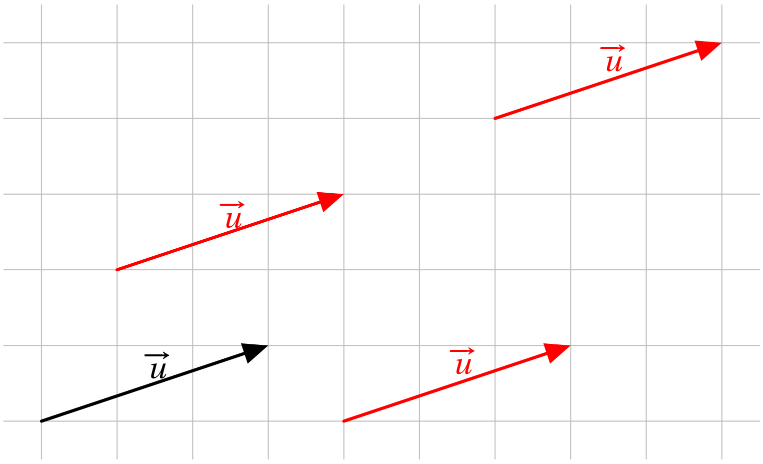


On remarque que :
- (AB) et (DC) sont parallèles (même direction),
- AB et DC sont de même longueur,
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ vont dans le même sens.

Les vecteurs seront souvent notés $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$...

Remarque :

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas fixe, on peut le dessiner n'importe où sur une feuille :



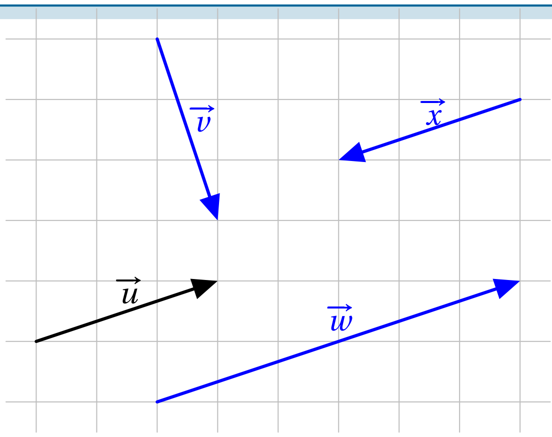
II. Calcul vectoriel

1. Égalité de vecteurs

Définition 2:

Deux vecteurs AB et DC sont **égaux** si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Aucun des vecteurs ci-contre ne sont égaux deux à deux.



Remarque :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $A = B$,
- Si on fixe un point O, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M vérifiant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.

2. Opposé d'un vecteur

Définition 3:

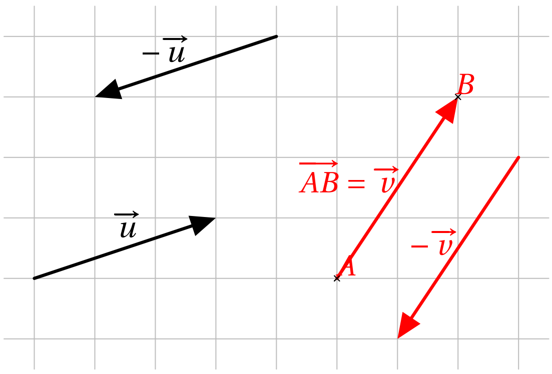
Quels que soient les points A et B, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque :

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.

Remarque :

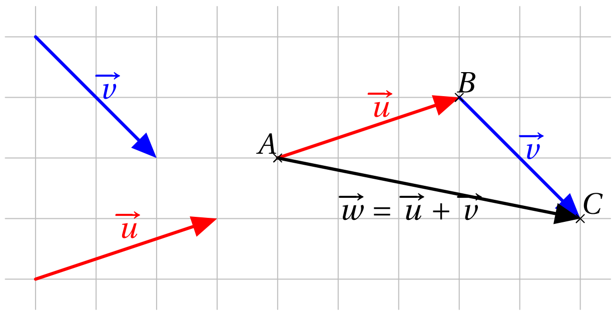
Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B', alors on a $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$



3. Somme de deux vecteurs

Définition 4:

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on définit le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de la façon suivante :
Soit A un point du plan, on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B,
puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.



Propriété 1 :

Relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 2 :

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :

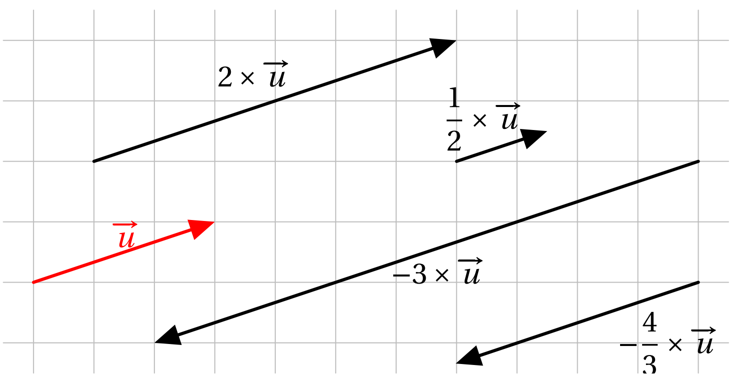
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$,
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$,
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

4. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel λ

Définition 5:

Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et λ un réel non nul, on définit le vecteur $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ par :

- A, B et C sont alignés,
- si $\lambda > 0$, $AC = kAB$ et B et C sont du même côté par rapport à A,
- Si $\lambda < 0$, $AC = -kAB$ et B et C sont de part et d'autre de A.



Remarque :

Si $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\lambda = 0$ alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Propriété 3 :

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels λ et μ , on a :

- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$
- $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Remarque :

Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B', alors on a $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$

III. Colinéarité de deux vecteurs

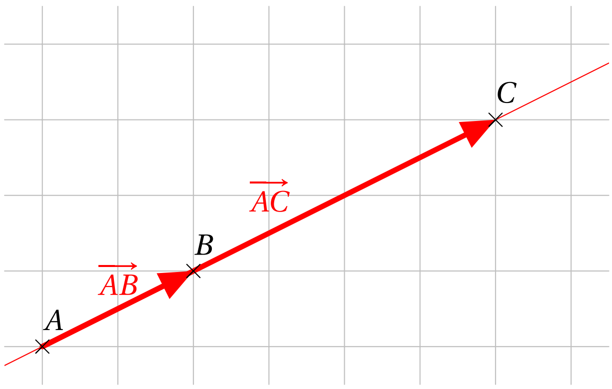
Définition 6:

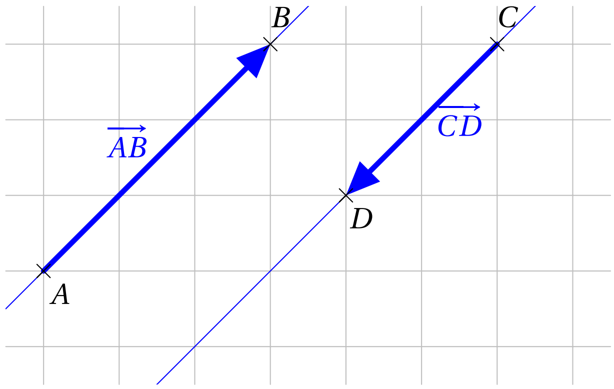
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction.
Sur le dessin précédent, tous les vecteurs dessinés sont colinéaires entre eux.

Propriété 4 :

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires,
- deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.





IV. Calculs dans un repère du plan

1. Coordonnées ponctuelles

Propriété 5 :
Dans le repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$, et $B(x_B; y_B)$.

- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$,
- Coordonnées du milieu I d'un segment $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$,
- Distance de A à B : $d(A; B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple 1:

Dans le repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(-3; -2)$, $B(1; -1)$, $C(4; 4)$ et $D(0; 3)$.
Montrer de deux façons différentes que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Méthode 1 : Avec les vecteurs

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,

$ABCD$ est donc un parallélogramme.

Méthode 2 :Avec les coordonnées du milieu

$\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{-3+4}{2}; \dfrac{-2+4}{2}\right) = (0.5; 1)$

$\left(\dfrac{x_B + x_D}{2}; \dfrac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\dfrac{1+0}{2}; \dfrac{-1+3}{2}\right) = (0.5; 1)$

$[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu,

$ABCD$ est donc un parallélogramme.

Quelle est la nature du triangle ABD?

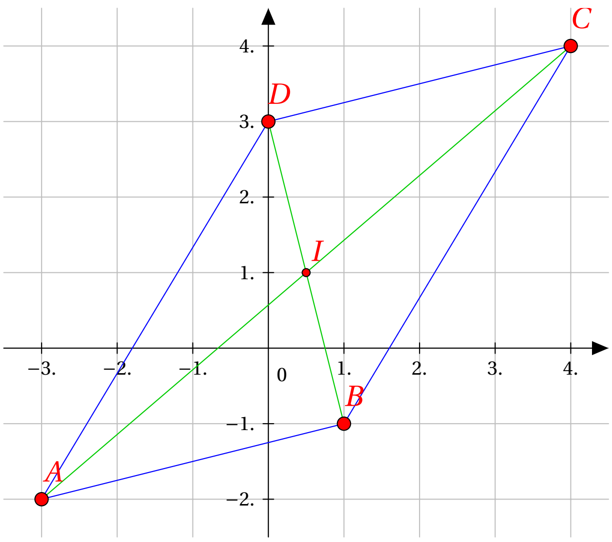
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$,

$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$,

$DB = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$,

$AB = DB$ et $AD^2 = AB^2 + BD^2$ donc :

$\boxed{ABD \text{ est donc un triangle rectangle isocèle en } B}$



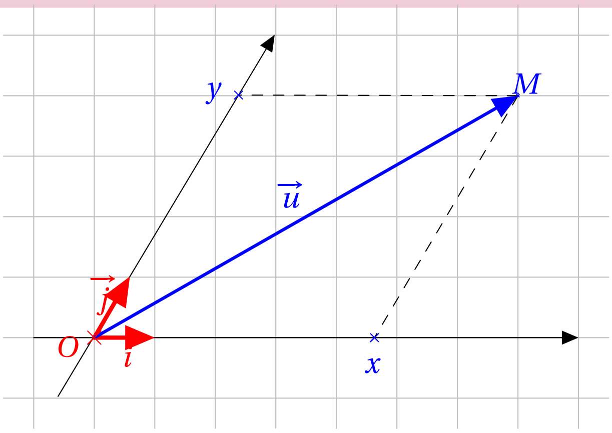
2. Coordonnées vectorielles

Propriété 6 :

Dans le repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

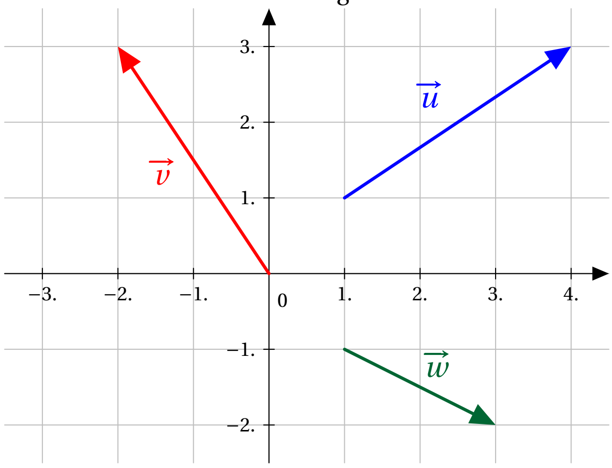
Remarque :

Bien souvent, on note $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ le repère $(O; I; J)$.
Un repère peut ne pas être orthonormé, mais quelconque comme dans l'illustration ci-contre.



Exemple 2:

Lire les coordonnées des vecteurs de la figure suivante :



$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Propriété 7 :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k un réel

- **Egalité de deux vecteurs :**
  Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égale
  $\vec{u} = \vec{v} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x' \\ y & = & y' \end{array} \right.$
- **Somme de deux vecteurs :**
  Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- **Produit d'un vecteur par un réel :**
  Le vecteur $\vec{w} = k\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple 3:

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5x\\x+y\end{pmatrix}$ alors :

- $\vec{v}=\vec{w} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x & = & 5 \\ x+y & = & 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{array}\right.$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}1+5\\-3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$
- $-\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
- $5\vec{v}\begin{pmatrix}5\times5\\5\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix}$
- $-\vec{u}+5\vec{v}\begin{pmatrix}-1+25\\3+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\18\end{pmatrix}$

3. Colinéarité de deux vecteurs

Propriété 8 :

Les vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{v}=k\vec{u}$ c'est-à dire $xy'-yx'=0$.

En effet : Ceci se traduit au niveau des coordonnées par $x'=kx$ et $y'=ky$, autrement dit, les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles, les produits en croix sont donc égaux : $xy'=x'y$.

Exemple 4:

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{u}=2\vec{v}$.

Exemple 5:

On considère les trois vecteurs du plan suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $2\times9-(-3)\times(-6)=18-18=0$,
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car $2\times(-7)-(-3)\times5=-14+15=1\neq0$.

Exemple 6:

Soient quatre points $A(1;1)$, $B(1;3)$, $C(7;4)$ et $D(5;5)$ du plan.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-1\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5-1\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$,

$XY'-YX'=6\times2-3\times4=0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires,
les droites (AC) et (BD) sont donc parallèles.

De plus, $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BD}$;

donc : $\boxed{ABDC \text{ est un trapèze}}$