❉ Chapitre 7 ❉

Probabilités conditionnelles

I. Rappel de seconde

Propriété 1 :

Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple 1:

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des essais sur 800 patients afin d'analyser l'efficacité de leurs tests de dépistage contre le sida. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	(M) Séropositif	$(\overline{M})$ Séronégatif	Total
(N) Test négatif	3	441	444
$(\overline{N})$ Test positif	354	2	356
Total	357	443	800

1. On choisit au hasard un résultat et on considère les évènements suivants :
   - M : « Le patient est séropositif. »
   - N : « Le test est négatif »

   Calculons :

   a. $P(M)$ **b.** $P(\overline{M})$ **c.** $P(N)$ **d.** $P(M \cap N)$ **e.** $P(M \cup N)$

1. **a.** $P(M) = \dfrac{357}{800} = 0.44625$

   Il y a 44,625% de chance qu'un patient choisi au hasard soit séropositif.

   b. $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.44625 = 0.55375$

   Il y a 55.375% de chance qu'un patient choisi au hasard ne soit pas séropositif.

   c. $P(N) = \dfrac{444}{800} = 0.555$

   Il y a 55,5% de chance qu'un test choisi au hasard soit négatif.

   d. $P(M \cap N) = \dfrac{3}{800} = 0.00375$

   Il y a 0,375% de chance que le test d'une personne soit séropositive soit négatif.

   e. $P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N) = 0.44625 + 0.555 - 0.00375 = 0.9975$

   Il y a 99,75% de chance que le test soit négatif ou que la personne soit séropositive.

II. Probabilité de B sachant A

De nombreuses situation se résument à des phrases de la forme « si ... a lieu, alors la probabilité de ... est de ... » ou « sachant que ... a lieu, alors la probabilité de ... est de ... »

Dans ces cas, on nous demande de calculer la probabilité d'un événement à condition qu'autres soit vérifié. On calcul donc des probabilités conditionnelles.

Définition 1:
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note $P_A(B)$

Exemple 2:
On reprend l'exemple précédent.

2. **a.** On choisit maintenant au hasard un patient séropositif. Déterminons la probabilité que son test soit négatif.
   b. On choisit maintenant au hasard un test négatif. Déterminons la probabilité que le patient soit séropositif sachant que le test soit négatif.

Colorons un peu le tableau précédent pour faire ressortir les lignes et colonnes qui nous intéresse.

	(M) Séropositif	$(\overline{M})$ Séronégatif	Total
(N) Test négatif	3	441	444
$(\overline{N})$ Test positif	354	2	356
Total	357	443	800

2. **a.** On ne considère ici que les 357 patients séropositif. Sur ces personnes, 3 ont un test négatif.
   $P_M(N) = \dfrac{3}{357} \simeq 0,008403$. Sachant que le patient est séropositif, il y a 0,84% de chance d'avoir un test négatif.
   b. On ne considère ici que les 444 tests négatif. Sur ces tests, 3 sont ceux de personnes séropositives.
   $P_N(M) = \dfrac{3}{444} \simeq 0,00675$. Sachant que le test est négatif, il y a 0,675% de chance que la personne soit séropositive.

III. Cardinal et Probabilités conditionnelles

1. Cardinal d'un ensemble

Définition 2:
Soit E un ensemble. On appelle cardinal de E, noté $\text{Card}(E)$, le nombre d'éléments de E.

Exemple 3:
Soit $E = \{a, b, c, d\}$ L'ensemble E a 4 éléments. On dit que $\text{Card}(E) = 4$.

Soit $P = \{\} = \emptyset$ l'ensemble vide. $\text{Card}(P) = 0$. En effet, P n'a aucun élément.

Soit S= (n appartenant à $\mathbb{N}$, n pair et $3 < n < 15$). On a $\text{Card}(S) = 6$. En effet, on peut aussi écrire en extension $S = 4, 6, 8, 10, 12, 14$

2. Cardinal, fréquence conditionnelle et probabilités conditionnelles

Définition 3:
Soient A et B deux événements tels que $\text{Card}(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé, noté $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

Exemple 4:

Le tableau ci-contre donne la répartition des élèves d'une classe de Première STL. On choisit au hasard un élève. A est l'événement : « l'élève choisi est une fille » et B : « l'élève choisi est demi pensionnaire ».

La probabilité d'avoir choisi un élève demi pensionnaire sachant que c'est une fille est la fréquence des demi-pensionnaires dans la population des filles.

$$P_A(B) = \frac{f(A\cap B)}{f(A)} = \frac{\frac{7}{35}}{\frac{13}{35}} = \frac{7}{13}$$

	Externe	Demi-pensionnaire	Total
Fille	6	7	13
Garçon	15	7	22
Total	21	14	35

Propriété 2 :

Si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ »

On sait que $P(A\cap B) = \dfrac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(E)}$ et $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$

Calculons $\dfrac{A(A\cap B)}{P(A)}$ avec les notations ci dessus :

$$\begin{aligned}
\frac{P(A\cap B)}{P(A)} &= \frac{\frac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(E)}}{\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}} \\
&= \frac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(E)} \times \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(A)} \\
&= \frac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(A)} \\
&= P_A(B)
\end{aligned}$$

On a donc $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ■