❄ Chapitre 8 ❄

Les fonctions circulaires

I. Angles associés

Propriété 1 :

Pour tout nombre réel x, on a :

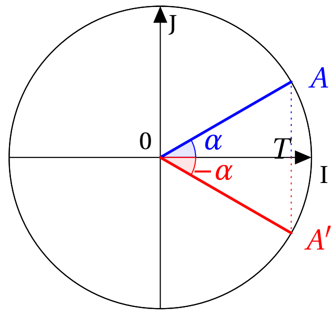
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

II. Équations trigonométriques

Propriété 2 :

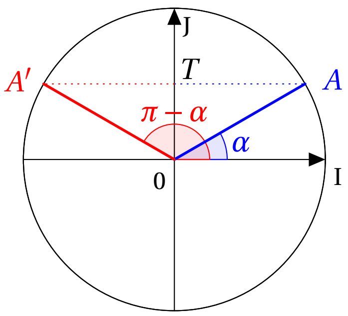
Si on note α une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right)$, alors l'équation $\cos x = \cos \alpha$ admet deux solutions :

$x = \alpha + 2k\pi$ et $x = -\alpha + 2k\pi$ avec k un entier relatif



Équation de la forme $\cos x = T$ ($T \in [-1;1]$) :

Sur ce cercle trigonométrique, il existe deux points A et A' d'abscisses T. Ils sont symétriques par rapport a l'axe des abscisses.



Propriété 3 :

Si on note α une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right)$, alors l'équation $\sin x = \sin \alpha$ admet deux solutions :

$x = \alpha + 2k\pi$ et $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ avec k un entier relatif

Équation de la forme $\sin x = T$ ($T \in [-1;1]$) :

Sur ce cercle trigonométrique, il existe deux points A et A' d'ordonnées T. Ils sont symétriques par rapport a l'axe des ordonnées.

Méthode 1 : *Résolution d'une équation trigonométrique*

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On place sur le cercle trigonométrique les points A et A' d'abscisses $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car on cherche à résoudre une équation « avec un cosinus »).
2. On détermine une mesure des angles orientés $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA'}\right)$.

   Dans notre cas on a $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{3\pi}{4}$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA'}\right) = -\frac{3\pi}{4}$
3. On conclut en donnant les deux familles de solutions :

   Les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ sont : $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ avec k un entier relatif.

III. Fonctions sinus et cosinus

1. Période et parité

D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

- $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{cases}$

Propriété 4 :

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, c'est à dire qu'elle se répètent de manière identique tous les 2π

- $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$

Propriété 5 :

La fonction cosinus est paire (elle admet une symétrie d'axe l'axe des ordonnées), et que la fonction sinus est impaire (elle admet 0 comme centre se symétrie).

2. Variations et courbe représentative

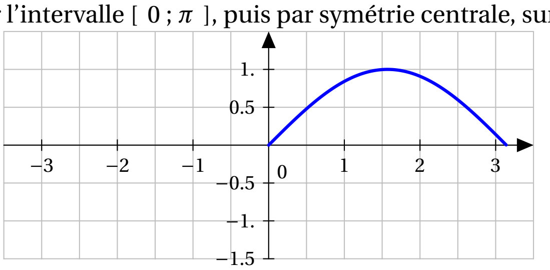
Les fonctions sinus et cosinus étant 2π-périodiques, on les étudie sur un intervalle de période 2π
Ces fonctions étant aussi paire ou impaire, on peut encore restreindre l'intervalle à $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$
On obtient les tableaux de variations par lecture du cercle trigonométrique :

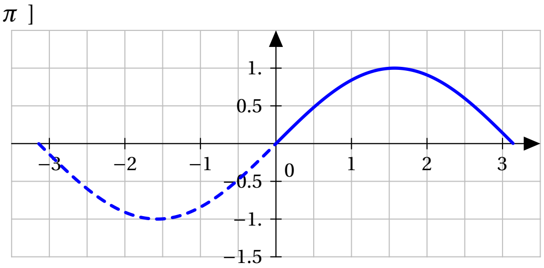
Fonction sinus

Le tableau de variations sur l'intervalle $[0;\pi]$ de la fonction sinus est :

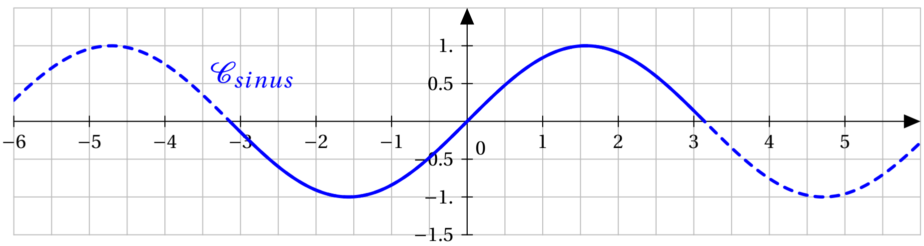
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1	↘ 0

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;I;J)$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$, puis par symétrie centrale, sur $[\ -\pi\ ;\ \pi\ ]$





puis par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction sinus qui s'appelle une **sinusoïde**

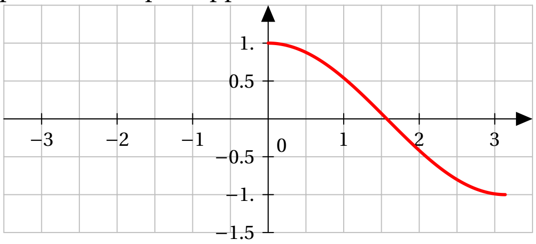


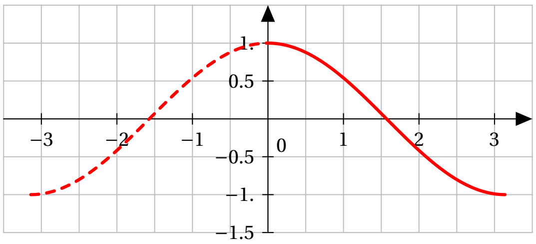
Fonction cosinus

Le tableau de variations sur l'intervalle $[0;\pi]$ de la fonction cosinus est :

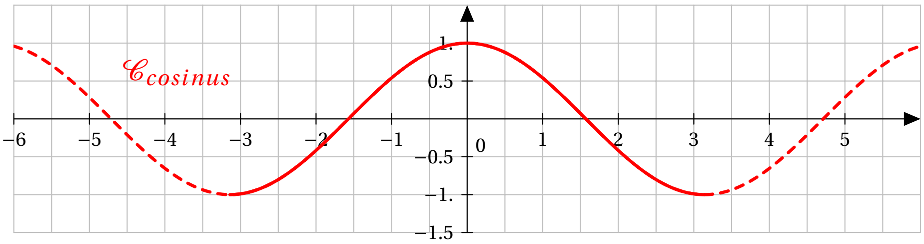
x	0	π
$\cos(x)$	1 ↘	-1

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;I;J)$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$, puis par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, sur $[\ -\pi\ ;\ \pi\ ]$





par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus qui s'appelle une **sinusoïde** :



IV. Fonctions trigonométriques appliquées aux sciences

On rencontre des fonctions trigonométriques en physique pour modéliser des phénomènes périodiques ou pseudo-périodiques.

Par exemple, on retrouve ces fonctions dans des domaines tel que :

- l'optique géométrique avec la loi de Descartes.
- l'optique ondulatoire notamment pour le calcul de l'intensité lumineuse lors des phénomènes de diffraction et d'interférences.
- la modulation d'un signal utilisant les transformées de Fourier.
- l'étude d'un signal électrique transitoire dans certains circuits.

Pour modéliser ces phénomènes, les physiciens utilise souvent des fonctions de la forme :

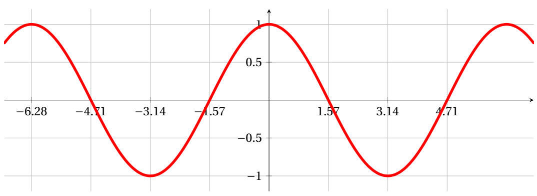
$$t \longmapsto A\sin\left(\omega t+\varphi\right) \text{ ou } t \longmapsto A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

1. Influence des différents paramètres

Dans la suite du cours, on part d'une fonction de départ du type cosinus, mais on obtient exactement la même chose avec des fonctions de type sinus.

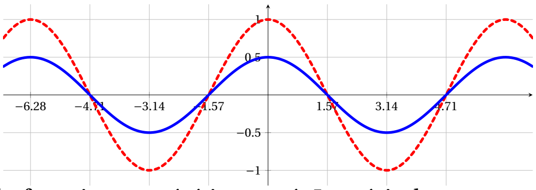
Partons de la représentation graphique de la fonction cosinus :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}$$



• Testons l'influence du paramètre A en traçant la courbe représentative de la fonction :

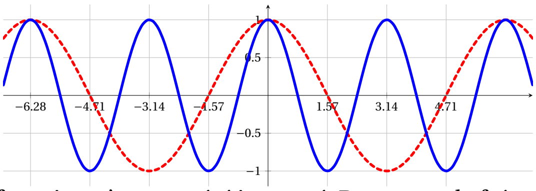
$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0.5\cos(t) \end{array}$$



On remarque que les valeurs minimales et maximales de la fonction ont été impacté. La période par contre ne subit aucun changement. Le coefficient A représente **l'amplitude** de la fonction.

• Testons l'influence du paramètre ω en traçant la courbe représentative de la fonction :

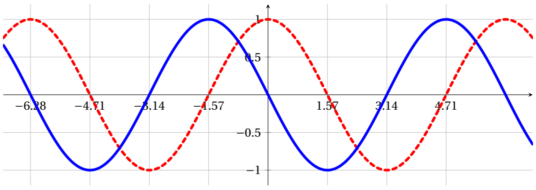
$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(2t) \end{array}$$



On remarque que les valeurs minimales et maximales de la fonction n'ont pas été impacté. Par contre la fréquence (et donc la période) a été modifié. Le coefficient ω représente la **pulsation** (exprimée en radians par seconde rad/s). Elle est proportionnelle à la fréquence : $\omega = 2\pi f$

• Testons l'influence du paramètre φ en traçant la courbe représentative de la fonction :

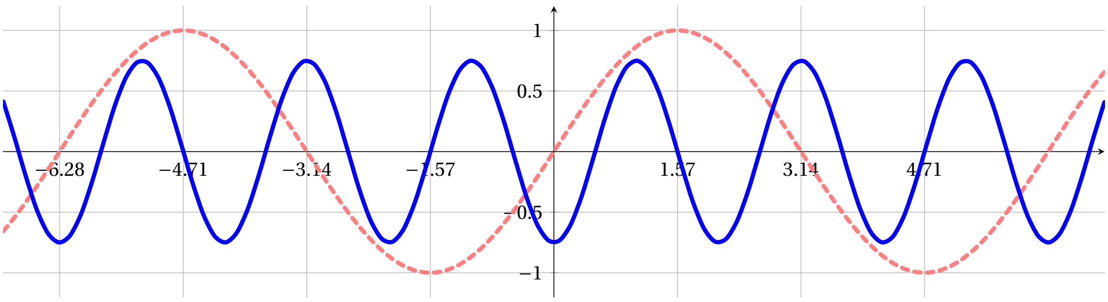
$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$



On remarque que la courbe s'est « décalé » de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche. Le coefficient φ représente la **phase à l'origine** (exprimée en radians rad). Elle peut également se noter Φ (Phi majuscule) ψ (Psi minuscule) ou Ψ (Psi majuscule).

Exemple 1:

Soit f une fonction dont la courbe est donnée sur le graphique ci-dessous.



On sait que cette courbe est de la forme $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$, l'objectif est de déterminer les valeurs des trois paramètres A, ω et φ.

On représente la fonction $\sin t$ (ici en rouge sur le graphique).

- L'amplitude A de cette fonction est de 0.75
- On remarque que sur une période de la fonction $\sin t$, il y a 3 période de la fonction f. Donc $\omega = 3$.
- On voit que la courbe en bleu est décalé de la courbe en rouge d'environ $\frac{3\pi}{2}$. La phase a l'origine φ est donc égale à $\frac{3\pi}{2}$

Finalement on obtient :

$$f(t) = 0.75 \times \sin\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right)$$