

❄ Chapitre 10 ❄

Nombre dérivé et équation de tangente

I. Tangente à une courbe : Aspect graphique

1. Coefficient directeur d'une droite

Propriété 1 :

On considère la droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ appartiennent à la droite (d) , le coefficient directeur m de la droite (d) vérifie :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

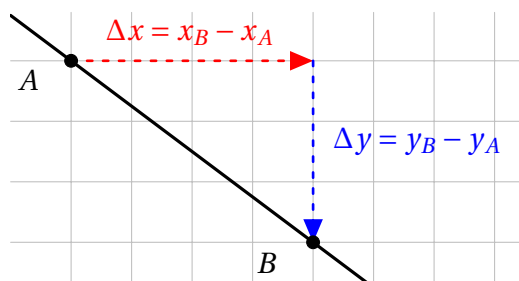
Remarque :

En physique, on utilise souvent la notation Δx pour $x_B - x_A$ et Δy pour $y_B - y_A$.

Nous avons alors avec cette écriture

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δx et Δy peuvent directement être lu sur le graphique comme ci-contre :



Pour une fonction affine, le coefficient directeur est donc égale au taux de variation.

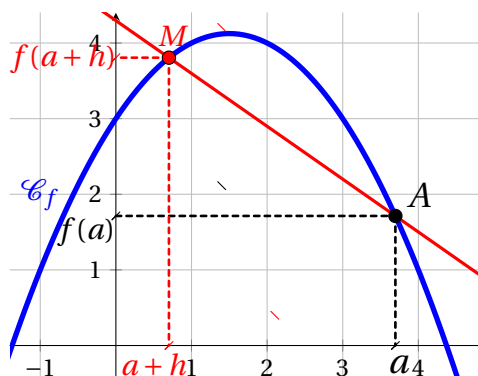
2. Sécantes à une courbe et taux de variation

Définition 1:

Le taux de variation de la fonction f au point A d'abscisse a est le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

On note cette quantité de plusieurs manière différente :

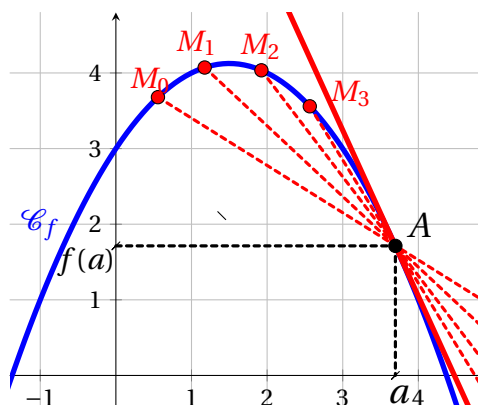
- En mathématiques, on utilise généralement $\tau(a)$.
- Les physiciens lui préfèrent la notation $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$ qui a l'avantage d'être plus « parlante ».



3. Sécante en un point et position limite

Définition 2:

La tangente à la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f au point A d'abscisses a est la droite passant par le point A , position limite des sécantes à la courbe \mathcal{C}_f passant par A .



II. Aspect algébrique : équation de tangente

1. Nombre dérivé

❄ Définition 3:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a .

Dire que f est dérivable en a , c'est dire que lorsque h se rapproche de 0, le taux de variation entre a et $a+h$ se rapproche d'une valeur l , ce que l'on note

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

l est appelé le **nombre dérivé de f en a** .

⚠ Remarque :

Pour désigner le nombre dérivé d'une fonction f en un point a , les mathématiciens emploient la notation $f'(a)$ due au mathématicien français Joseph-Louis LAGRANGE (1736 – 1813).

Les physiciens privilégient la notation différentielle introduite, en 1684, par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716), dans son traité « Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes ... ».

Par exemple, la dérivée de la vitesse par rapport au temps est noté $\frac{dv}{dt}$ ou encore \dot{v} . Cette notation dernière notation est appelée « notation de Newton ».

🍃 Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 6x + 11$. Montrons que f est dérivable en 2.

Calculons le taux de variations entre 2 et $2+h$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Pour calculer ce taux de variations, on a besoin de $f(2+h)$ et de $f(2)$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 6 \times 2 + 11 \\ &= 8 - 12 + 11 \\ &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^3 - 6 \times (2+h) + 11 \\ &= (2+h)(4+4h+h^2) - (12+6h) + 11 \\ &= 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3 - 12-6h+11 \\ &= 7+6h+6h^2+h^3 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \frac{7+6h+6h^2+h^3-7}{h} \\ &= \frac{6h+6h^2+h^3}{h} \\ &= \frac{h(6+6h+h^2)}{h} \\ &= 6+6h+h^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6+6h+h^2 = 6$$

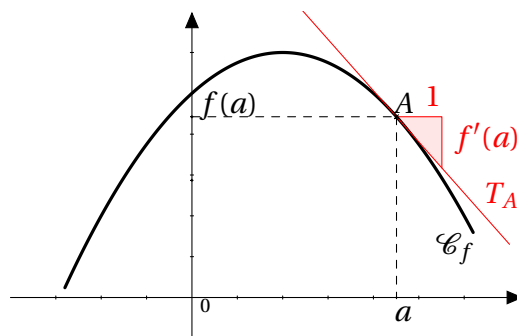
Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6$.

2. Équation de la tangente

❄ Définition 4:

Soit f une fonction dérivable en a , \mathcal{C}_f sa courbe représentative et A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a .

La **tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A** est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



🔴 Propriété 2 :

Soit f une fonction dérivable en a , \mathcal{C}_f sa courbe représentative et A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a .

La tangente T_A en A à \mathcal{C}_f a pour équation :

$$T_A : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

🍃 Démonstration :

On remarquera que la tangente T_A est une droite, de coefficient directeur donné ($f'(a)$) et passant par le point A de coordonnée $(a; f(a))$

🍃 Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 6x + 11$. Déterminons cette fois l'équation de la tangente en 2.

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\ &= 6(x - 2) + 7 \\ &= 6x - 12 + 7 \\ &= 6x - 5 \end{aligned}$$

L'équation réduite de la tangente en 2 est $y = 6x - 5$.

3. Approximation affine

❄ Définition 5:

Soit f une fonction dérivable en a , l'approximation affine de $f(x)$ (lorsque x est au voisinage de a est donnée par :

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$$

Autrement dit, à proximité de a , l'accroissement des images est approximativement proportionnel à l'accroissement de la variable. Le coefficient de proportionnalité est le nombre dérivé $f'(a)$. L'approximation est d'autant meilleur que la valeur de x est proche de la valeur a .

$$\underbrace{f(x) - f(a)}_{\text{Accroissement des images}} \simeq \underbrace{f'(a)}_{\text{Coefficient de proportionnalité}} \times \underbrace{(x - a)}_{\text{Accroissement de la variable}}$$

On peut aussi à l'aide d'un changement de variable, exprimer cette approximation affine en fonction de h , qui serait la différence entre deux abscisses.

$$\underbrace{f(a + h) - f(a)}_{\text{Accroissement des images}} \simeq \underbrace{f'(a)}_{\text{Coefficient de proportionnalité}} \times \underbrace{(h)}_{\text{Accroissement de la variable}}$$