

❄ Chapitre 12 ❄

Dérivée de fonctions 1**I. De nombre dérivé à fonction dérivée**❄ **Définition 1:**

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} si et seulement si elle est dérivable en tout réel a de I . Si f est dérivable sur I , on appelle fonction dérivée de f sur I la fonction notée f' , définie sur I par $f' : x \rightarrow f'(x)$.

🍃 **Exemple 1:**

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

Soit $a \in \mathbb{R}$, on calcule le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$.

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= 2a + h \end{aligned}$$

Puis on détermine la valeur de ce taux de variation quand h se rapproche de 0.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h \\ &= 2a \end{aligned}$$

Donc, quelque soit le réel $a \in \mathbb{R}$, on a $f'(a) = 2a$. La fonction f est donc dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$, donc f admet une fonction dérivée f' sur \mathbb{R} et on a : $f'(x) = 2x$.

II. Dérivée des fonctions polynômes**1. Dérivée de fonction de référence**


Le tableau ci dessous regroupe les dérivées et les ensembles de définitions des différentes fonctions de référence.

🍷 **Propriété 1 :**

Fonction f	Domaine de définition	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
k avec $k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	0	\mathbb{R}
x	\mathbb{R}	1	\mathbb{R}
x^2	\mathbb{R}	$2x$	\mathbb{R}
x^3	\mathbb{R}	$3x^2$	\mathbb{R}

2. Produit d'une fonction par un réel

Propriété 2 :

 Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un nombre réel et u une fonction dérivable sur $]a; b[$, alors f est dérivable sur $]a; b[$ et

$$f'(x) = \lambda u'(x)$$

Exemple 2:

Dérivons la fonction $f: x \mapsto 4x^3$.

La fonction $f(x) = 4x^3 = 4 \times u(x)$


$$\text{avec} \quad u(x) = x^3 \quad u'(x) = 3x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times u'(x) \\ &= 4 \times 3x^2 \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction $f: x \mapsto 4x^3$ et la fonction $f': x \mapsto 12x^2$

3. Somme de deux fonctions

Propriété 3 :

 Si $f(x) = u(x) + v(x)$ avec u et v deux fonctions dérivables sur $]a; b[$, alors f est dérivable sur $]a; b[$ et

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Exemple 3:

Dérivons la fonction $f: x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + 5$.

La fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5 = u(x) + v(x) + w(x)$

$$\begin{array}{l} \text{avec} \\ u(x) = 2x^3 \\ v(x) = 3x^2 \\ w(x) = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} u'(x) = 6x^2 \\ v'(x) = 6x \\ w'(x) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times u'(x) + v'(x) + w'(x) \\ &= 6x^2 + 6x + 0 \\ &= 6x^2 + 6x \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction $f: x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + 5$ et la fonction $f': x \mapsto 6x^2 + 6x$