❉ Chapitre 13 ❉

Suites géométrique

I. Définition par récurrence

Définition 1:

Une suite est dite **géométrique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois un même nombre q appelé **raison** de la suite.

Une suite géométrique est définie par la donnée de son premier terme (généralement u_0 ou u_1) et la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = k \text{ avec k} \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{array}\right.$$

Exemple 1:

Au 1er janvier 2018, Bruno place un capital de 1500 €à intérêts composés sur un livret au taux de 2% par an. On note u_n le capital sur le compte au 1er janvier $(2008+n)$.

Le premier terme de la suite (u_n) est $u_0 = 1500$.

On passe d'un terme au suivant en multipliant par $1,02$, c'est-à-dire : $u_{n+1} = u_n \times 1,02$.

(u_n) semble être une suite géométrique de raison $1,02$.

Méthode 1 :

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on calcule le rapport entre deux termes consécutifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Si ce rapport est constant, quelles que soient les valeurs de n, c'est à dire que sa valeur ne dépend pas de n, on peut en conclure que la suite (u_n) est géométrique.

Exemple 2:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \\ &= \frac{2^n \times 2^1}{2^n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$

II. Propriétés des suites géométriques

1. Sens de variation

Propriété 1 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de **premier terme strictement positif** alors :

- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est **strictement décroissante.**
- Si $q = 1$ alors (u_n) est **constante.**
- Si $q > 1$ alors (u_n) est **strictement croissante.**

Exemple 3:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$, pour tout entier naturel n. On sait que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2 > 1$ donc c'est une suite géométrique croissante.

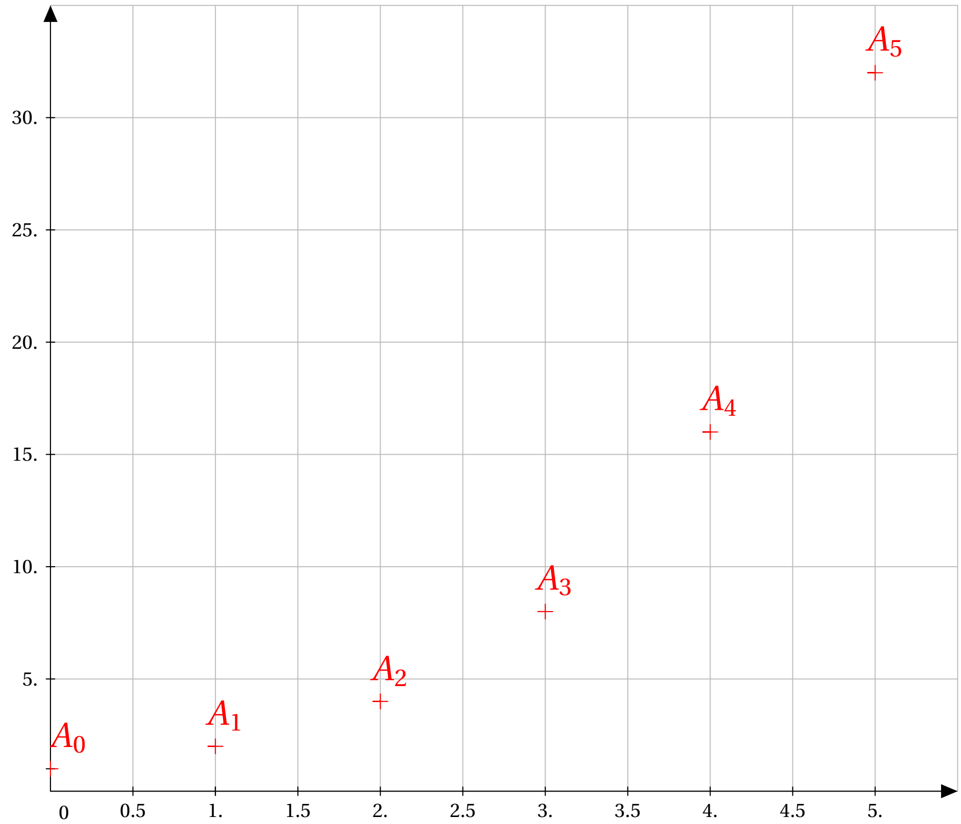
2. Représentation graphique

Exemple 4:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$, pour tout entier naturel n. On calcul les premiers termes de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	2	4	8	16	32

Sur le graphique ci dessous, les points A_n correspondent à la suite (u_n).



Une suite géométrique est représentée par des points qui suivent une évolution exponentielle.