❄ Chapitre 14 ❄

Dérivée de fonctions

I. Fonction dérivée

Le tableau ci dessous complète celui vu dans le chapitre précédent. Il donne les fonctions dérivées d'autres fonctions de référence.

Propriété 1 :

Fonction f	Domaine de définition	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}/\{0\}=\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}=]0;+\infty[$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque :
On peut démontrer ces résultats à l'aide de la définition vu dans le chapitre précédent en suivant la méthode vu pour la fonction carrée.

II. Dérivées et opérations

1. Produit de deux fonctions

Propriété 2 :
Si $f(x)=u(x)v(x)$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $]a;b[$ alors la fonction f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

Exemple 1:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2\times\cos x$.

On a une fonction de la forme $f(x)=u(x)\times v(x)$ avec

$$u(x)=x^2 \quad \text{et} \quad v(x)=\cos x$$

Pour dériver f, on calcule les dérivées des fonctions u et v :

$$u'(x)=2x \quad \text{et} \quad v'(x)=-\sin x$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \\ &= 2x\times\cos x+x^2\times(-\sin x) \\ &= 2x\cos x-x^2\sin x \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction f est $f'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x$

2. Inverse d'une fonction

Propriété 3 :

Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}/0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

On a une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec

$$u(x) = \sin x$$

Pour dériver f, on calcule la dérivée de la fonction u :

$$u'(x) = \cos x$$

Donc

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} = -\frac{\cos x}{[\sin x]^2}$$

La dérivée de la fonction f est $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{[\sin x]^2}$

3. Quotient de deux fonctions

Propriété 4 :

Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $]a;b[$ et si $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemple 3:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

On a une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec

$$u(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

Pour dériver f, on calcule les dérivées des fonctions u et v :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

Donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x-\sqrt{x}\times 1}{x^2}\\
&= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{-\sqrt{x}}{2}}{x^2}\\
&= -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}
\end{aligned}$$

La dérivée de la fonction f est $f'(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2}$

Remarque :

On aurait pu trouver ce résultats plus simplement en pensant dès le début a la simplification suivante : $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
Avec cette simplification on peut appliquer la propriété de la partie 2., ce qui donne directement le résultat.

III. Dérivée de fonctions composées

1. Dérivée de $x \mapsto u(ax+b)$

Propriété 5 :

Soit u définie et dérivable sur I et soit f la fonction définie par : $f(x) = u(ax+b)$ (elle est donc définie pour tout x tel que $ax+b$ appartient à I).
Dans ces conditions, la fonction f est dérivable et on a :

$$f'(x) = a \times u'(ax+b)$$

Exemple 4:

Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$.

On a une fonction de la forme $f(x) = u(ax+b)$ avec

$$u(X) = \sqrt{X} \quad \text{et} \quad ax+b = 2x-4$$

D'où on obtient :

$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = -4$$

Pour dériver f, on calcule la dérivée de la fonctions u :

$$u'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a \times u'(ax+b)\\
&= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{ax+b}}\\
&= \frac{2}{2\sqrt{2x-4}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2x-4}}
\end{aligned}$$

La dérivée de la fonction f est $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$

2. Dérivée de $t \mapsto A\cos(\omega t+\varphi)$

Propriété 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « La dérivée de la fonction $f(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ est $f'(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$ »

On a une fonction de la forme $f(t) = Au(at+b)$ avec

$$u(X) = \cos X \quad \text{et} \quad at+b = \omega t-\varphi$$

D'où on obtient :

$$a = \omega \quad \text{et} \quad b = \varphi$$

Pour dériver f, on calcule la dérivée de la fonctions u :

$$u'(X) = -\sin(X)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(t) &= A\times a\times u'(at+b) = A\times\omega\times(-\sin(at+b) \\ &= -A\times\omega\times\sin(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction f est $f'(t) = -A\times\omega\times\sin(\omega t+\varphi)$ ∎

Exemple 5:

Dérivons la fonction $f:\ t \mapsto 3\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$

On utilise la propriété précédente avec $A=3 \quad \omega=2 \quad \text{et} \quad \varphi=\frac{\pi}{2}$

Donc :

$$f'(t) = -A\times\omega\times\sin(\omega t+\varphi) = -3\times2\times\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right) = -6\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$$

La dérivée de la fonction f est $f'(t) = -6\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$

3. Dérivée de $t \mapsto A\sin(\omega t+\varphi)$

Propriété 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(t) = A\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

Exemple 6:

Dérivons la fonction $f:\ t \mapsto \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{4}t+\frac{3\pi}{2}\right)$

On utilise la propriété précédente avec $A=\frac{1}{2} \quad \omega=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \varphi=\frac{3\pi}{2}$

Donc :

$$f'(t) = A\times\omega\times\cos(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\cos\left(\frac{1}{4}t+\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}\cos\left(\frac{1}{4}t+\frac{3\pi}{2}\right)$$

La dérivée de la fonction f est $f'(t) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{1}{4}t+\frac{3\pi}{2}\right)$