

❁ Chapitre 16 ❁

# Application de la dérivation

## I. Sens de variation et dérivée

### ❁ Propriété 1 :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
- Si  $f$  est constante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

### ❁ Propriété 2 :

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f'(x) = 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) > 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) < 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

### 💡 Méthode 1 :

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction avec les propriétés ci-dessus, il faut :

1. dériver la fonction dont on veut déterminer les variations
2. étudier le signe de la fonction dérivée
3. dresser le tableau de signe de la fonction dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction.

### 🍃 Exemple 1:

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -2; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 8}{x + 2}$ .

1. On dérive la fonction  $f : f(x) = \frac{2x^2 - x - 8}{x + 2} = \frac{u(x)}{v(x)}$  avec  $u(x) = 2x^2 - x - 8$  et  $v(x) = x + 2$ .

On a donc  $u'(x) = 4x - 1$  et  $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(4x - 1) \times (x + 2) - (2x^2 - x - 8) \times 1}{(x + 2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x - x - 2 - 2x^2 + x + 8}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x + 2)^2} = \frac{2(x^2 + 4x + 3)}{(x + 2)^2}$$

2. Signe de  $f'(x)$  :

• Étude du signe du numérateur :

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4^2 - 4 \times 1 \times 3$$

$$= 4 \geq 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} \text{ et } x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = -3 \text{ et } x_2 = -1$$

• Étude du signe du dénominateur :  $(x + 2)^2 \geq 0$ .

3. Tableau de signe de  $f'$  et tableau de variation de  $f$  :

$x$	-2	-1	$+\infty$			
2		+	+			
$x^2 + 4x + 3$		-	0	+		
$(x + 2)^2$	0	+		+		
$f'(x)$		-	0	+		
$f(x)$		$+\infty$	$\searrow$	$-5$	$\nearrow$	$+\infty$

## II. Extremum

### ❄ Définition 1:

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un nombre réel appartenant à  $I$ .

- La fonction  $f$  admet un **maximum** sur  $I$ , atteint en  $x_0$  signifie que : pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$ .  
 $M = f(x_0)$  est le **maximum** de  $f$  sur  $I$ .
- La fonction  $f$  admet un **minimum** sur  $I$ , atteint en  $x_0$  signifie que : pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$ .  
 $m = f(x_0)$  est le **minimum** de  $f$  sur  $I$ .
- Dire que  $f(x_0)$  est un **extremum** de  $f$  signifie que  $f(x_0)$  est un maximum ou un minimum.

### 🔴 Propriété 3 :

⚡ Soit  $f$  une fonction défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si la fonction  $f$  admet un extremum local en  $x_0 \in I$  alors il existe un réel  $x_0 \in I$  tel que  $f'(x_0) = 0$

### 🍃 Exemple 2:

On reprend l'exemple du I.

La fonction  $f$  admet un extremum en  $x = -1$  qui vaut  $-5$  donc  $f'$  s'annule en  $x_0 = -1$ .

En observant le tableau de variations, on peut aussi dire que cet extremum est le minimum de la fonction  $f$ .

### ⚠ Remarque :

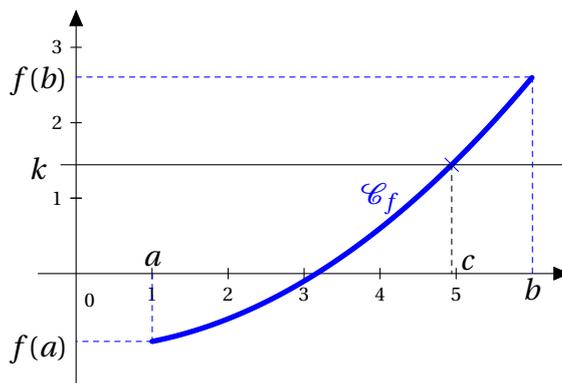
la fonction  $f$  admet un extremum local en  $x_0 \in I$  si et seulement si il existe un réel  $x_0 \in I$  tel que  $f'(x_0) = 0$  **et** que la fonction  $f'$  change de signe en  $x_0$ .

## III. Résolution de l'équation $f(x) = k$

### 🔴 Propriété 4 : Théorème des valeurs intermédiaires

⚡ Si  $f$  est une fonction **continue** et strictement monotone sur un intervalle  $[a; b]$  alors pour tout nombre réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un **unique** nombre réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$ .

### 🍃 Exemple 3:



### Convention sur les tableaux de variation

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

$x$	$a$	$c$	$b$
$f(x)$	$f(a)$	$f(c) = k$	$f(b)$

Diagram illustrating the convention for variation tables. The table shows the mapping from  $x$  to  $f(x)$ . An arrow points from  $f(a)$  to  $f(c) = k$ , and another arrow points from  $f(c) = k$  to  $f(b)$ . A vertical dashed arrow points from  $c$  down to  $f(c) = k$ .