❉ Chapitre 17 ❉

Produit scalaire dans le plan

I. Approche géométrique

1. Norme d'un vecteur

Définition 1:

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A et B deux points d'un plan tel que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit un des représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$, noté $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$, est égale à la longueur du segment $[AB]$.

Propriété 1 :

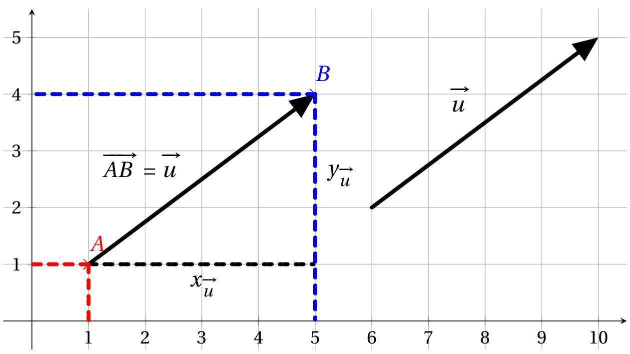
Soit $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé d'un plan. Dans ce repère, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_{\overrightarrow{u}}\\y_{\overrightarrow{u}}\end{pmatrix}$.

La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est obtenue grâce a la formule :

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{{x_{\overrightarrow{u}}}^2 + {y_{\overrightarrow{u}}}^2}$$

Exemple 1:

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$:



1. Un des représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$
2. Calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   Le point $A(1;1)$ et le point $B(5;4)$ donc :
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5-1\\4-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
3. Calcul de la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{u}\right\| &= \sqrt{{x_{\overrightarrow{u}}}^2 + {y_{\overrightarrow{u}}}^2}\\ &= \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est égale à 5.

2. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition 2:

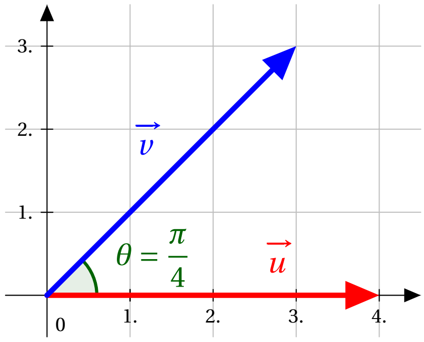
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls d'un plan et θ l'angle formé par ces deux vecteurs. Le produit scalaire, noté « $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ », du vecteur $\overrightarrow{u}$ et du vecteur $\overrightarrow{v}$ est donné par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos(\theta)$$

Exemple 2:

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, calculons leur produit scalaire.

- $\left\|\vec{u}\right\| = 4$
- $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$
- $\theta = 45° = \dfrac{\pi}{4}$



$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\vec{v} &= \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos(\theta)\\ &= 4\times 3\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\end{aligned}$$

Le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 12.

3. Projection d'un vecteur

Propriété 2 :

Soient trois points A, B et C et H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$$\overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{OB} = \overline{OA}\times\overline{OH}$$

$\overline{OA}$ et $\overline{OH}$ désigne une distance algébrique (qui peut être positive ou négative en fonction du repère).

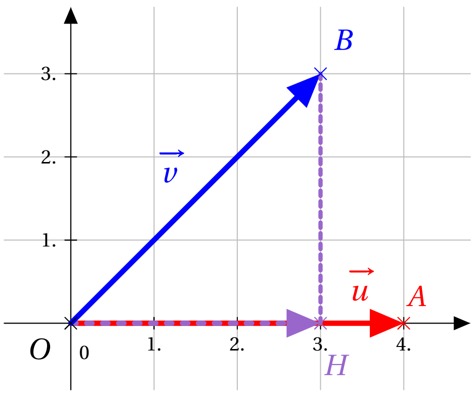
Exemple 3:

On reprend l'exemple précédent. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

1. On projette le vecteur $\overrightarrow{OB}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$:
   Pour cela on projette orthogonalement le point B sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$. On crée ainsi le point H.
2. On détermina la norme du vecteur $\overrightarrow{OH}$ (ici, on a $\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = 3$)
3. On utilise ensuite la propriété 2. :

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\vec{v} &= \overline{OA}\times\overline{OH}\\ &= 4\times 3 = 12\end{aligned}$$

Le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 12.



II. Propriétés

Propriété 3 :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs et λ est un réel

- Commutativité : $\vec{u}\,.\vec{v} = \vec{v}\,.\vec{u}$
- Linéarité : $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda\vec{u}\,.\vec{v}$
- Distributivité : $\vec{u}\,.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{u}\,.\vec{w}$

Exemple 4:

Soient A, B et C trois points du plan, on veut simplifier $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{BD}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}\,.\overrightarrow{BD}\\ &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}).\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{CB}\,.\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

III. Approche analytique

1. Expression analytique

On se place dans un repère orthonormé du plan $(O;I;J)$

Définition 3:

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_{\overrightarrow{u}}\\y_{\overrightarrow{u}}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_{\overrightarrow{v}}\\y_{\overrightarrow{v}}\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le réel défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}}x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{v}}$$

Exemple 5:

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, calculons leur produit scalaire :

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} & = & x_{\overrightarrow{u}}x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{v}}\\ & = & 1\times 3+1\times 2\\ & = & 5\end{array}$$

Le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut 5.

Remarque :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2+y^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$, on notera parfois $||\overrightarrow{u}||^2 = \overrightarrow{u}^2$
- Si l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors le produit scalaire est nul
- La réciproque est fausse : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ n'implique pas nécessairement $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\overrightarrow{v} = 0$

Exemple 6:

Soient $\overrightarrow{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 1\times 0+0\times 1 = 0$ et pourtant, ni $\overrightarrow{i}$ ni $\overrightarrow{j}$ ne sont égaux à $\overrightarrow{0}$

2. Produit scalaire et orthogonalité

Propriété 4 :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \text{ si et seulement si } \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

Exemple 7:

On considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux?

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}}x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{v}} = 3\times(-1)+2\times\dfrac{3}{2} = 0$
  donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = x_{\overrightarrow{u}}x_{\overrightarrow{w}} + y_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{w}} = 3\times 0+2\times(-1) = -2$
  donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas orthogonaux

IV. Relation métrique dans un triangle

1. Formules d'Al Kaschi

Propriété 5 : *Formule d'Al Kaschi*

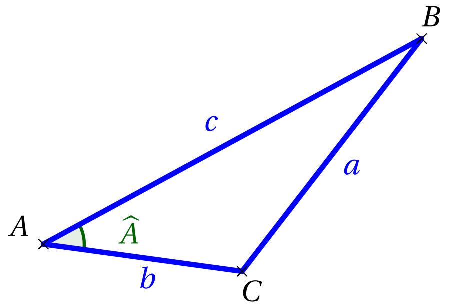
On considère un triangle ABC quelconque de côtés $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$ avec l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \widehat{A}$.
On a la relation suivante :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Démonstration :

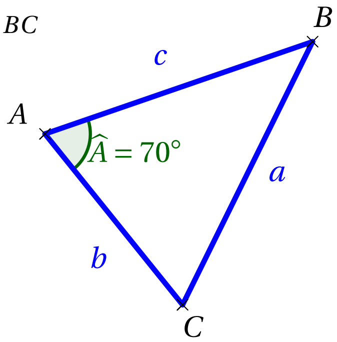
$a^2 = BC^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2$
Par la relation du Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
a^2 &= ||\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}||^2\\
&= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\
&= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\\
&= ||\overrightarrow{BA}||^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + ||\overrightarrow{AC}||^2\\
&= ||\overrightarrow{BA}||^2 + 2||\overrightarrow{BA}||||\overrightarrow{AC}||\cos(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}) + ||\overrightarrow{AC}||^2\\
a^2 &= c^2 - 2cb\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) + b^2
\end{aligned}$$



Exemple 8:

On considère le triangle ABC de mesures $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm et $\widehat{A} = 70°$. Calculer BC



$$\begin{aligned}
BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2\times AC\times AB\times\cos\widehat{A}\\
&= 3^2 + 4^2 - 2\times 3\times 4\times\cos(70°)\\
&= 25 - 24\cos(70°)\\
&= 16,79
\end{aligned}$$

Donc $BC = 4,1$ cm