❄ Chapitre 18 ❄

Primitive de fonctions

I. Notion de primitives

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition 1:
Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathbb{R}$.
Dire que F est **une primitive** de f sur $\mathbb{R}$ signifie que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$.

Exemple 1:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 3x + 5$.

Montrons que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 + 5x + 9$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 5x + 9\right)' \\ &= 4x^3 + \frac{3}{2} \times 2x + 5 + 0 \\ &= 4x^3 + 3x + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$F'(x) = f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété 1 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme $F + c$, où c est un réel.

Démonstration :
F est une primitive de f. On pose $G(x) = F(x) + C$.

$$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

Donc G est une primitive de f. ∎

Exemple 2:
Montrons que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 5x + 12$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G'(x) &= (x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 5x + 12)' \\ &= 4x^3 + \frac{3}{2} \times 2x + 5 + 0 \\ &= 4x^3 + 3x + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$G'(x) = f(x)$ donc $G\colon x \mapsto F(x) + 3$ est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Linéarité des primitives

Propriété 2 :
Soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$ alors :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :

- $(F+G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

■

II. Calcul de primitives

1. Primitives d'un polynôme

Dans cette partie nous allons calculer directement la primitive d'une fonction polynôme. Pour cela, on utilise la linéarité de la primitive ainsi que les formules présentes dans le tableau ci-dessous :

$f(x)$	$F(x)$	f définie sur
$k \in \mathbb{R}$	$kx + C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Exemple 3:
Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 9$. Déterminons la primitive F de la fonction f.

Primitive de x^3	Primitive de x^2	Primitive de x	Primitive de 9
On utilise la dernière ligne du tableau avec $n=3$ $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C_1 = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C_1 = \frac{1}{4}x^4 + C_1$	$\frac{1}{3}x^3 + C_2$	$\frac{1}{2}x^2 + C_3$	On utilise la première ligne du tableau avec $k=9$ $9x + C_4$

Donc en utilisant la linéarité des primitives, on obtient :

$$\begin{aligned}
F(x) &= 5 \times \frac{1}{4}x^4 + C_1 + 4 \times \frac{1}{3}x^3 + C_2 - 8 \times \frac{1}{2}x^2 + C_3 + 9x + C_4 \\
&= \frac{5}{4}x^4 + 5C_1 + \frac{4}{3}x^3 + 4C_2 - \frac{8}{2}x^2 + 8C_3 + 9x + C_4 \\
&= \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + 5C_1 + 4C_2 + 8C_3 + C_4 \\
&= \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + C
\end{aligned}$$

La primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + C$.

2. Primitive des fonctions trigonométriques

Il existe aussi des primitives pour les deux fonctions trigonométriques que l'on connait, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$:

$f(x)$	$F(x)$	f définie sur
$\sin x$	$-\cos x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

La composition à droite par une fonction affine permet d'étendre ce formulaire. En effet :

Propriété 3 :
Si F est une primitive de f, et si a et b sont deux réels avec $a \neq 0$, alors la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$.

En particulier, on obtient des primitives de signaux périodiques apparaissant par exemple dans le circuit RLC :

$f(t)$	$F(t)$	f définie sur
$A\sin(\omega t+\varphi)$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

3. Primitive en un point

Propriété 4 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Il existe une primitive de f sur $\mathbb{R}$ **et une seule** telle que $G(x_0) = y_0$ où x_0 est un réel donné de $\mathbb{R}$ et y_0 un nombre réel donné.

Exemple 4:

Soit $f\colon\ t \mapsto 5\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminons la primitive F de la fonction f qui s'annule en $\frac{\pi}{6}$.

D'après les formule précédente, on obtient : $F(x) = -\frac{5}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+C$
De plus, on sait que si $t = \frac{\pi}{6}$ alors la fonction F s'annule. Donc :

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 0\\
-\frac{5}{2}\cos\left(2\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+C &= 0\\
C &= \frac{5}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \frac{5}{2}\times\frac{-1}{2}\\
&= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Finalement, la primitive F de la fonction f qui s'annule en $\frac{\pi}{6}$ est $F(x) = -\frac{5}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{5}{4}$